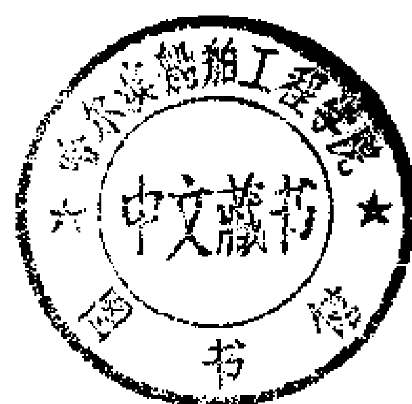
天元研究生数学丛书

群表示论

曹锡华　叶家琛　编著



北京大学出版社

北　　京

图书在版编目(CIP)数据

群表示论/曹锡华,叶家琛编著. 一北京:北京大学出版社,1998.5

(天元研究生数学丛书)

ISBN 7-301-03522-5

Ⅰ.群… Ⅱ.①曹… ②叶… Ⅲ.群表示-研究生-教材 Ⅳ.0152.6

书　　名:群表示论(天元研究生数学丛书)

著作责任者:曹锡华　叶家琛　编著

责 任 编 辑:刘　勇

标 准 书 号:ISBN 7-301-03522-5/O·402

出 版 者:北京大学出版社

地　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871

电　　话:出版部 62752015　发行部 62559712　编辑部 62752032

排 印 者:北京大学印刷厂

发 行 者:北京大学出版社

经 销 者:新华书店

850×1168　32开本　7.375印张　178千字

1998年5月第一版　1998年5月第一次印刷

印　　数:0001—3,000册

定　　价:12.50元

《天元研究生数学丛书》书目

（标△号者表示待出版）

1. 复变函数论选讲 张南岳等编著
2. 近代分析引论 苏维宜编著
3. 高等概率论 程士宏编著
4. 复半单李代数引论 孟道骥编著
5. 群表示论 曹锡华等编著
6. 模形式讲义 △ 陆洪文等编著

《天元研究生数学丛书》编委会

内 容 简 介

群表示理论是近代数学中发展迅速且相当活跃的数学分支，它在量子力学、量子化学、核结构、固体物理、场论等的研究中有十分广泛的应用. 本书旨在全面讲述群的表示理论. 全书共分四章，内容包括：有限群的常表示，包括线性表示的基本概念、特征标理论和诱导表示的一系列重要结果；有限群的模表示，包括 Brauer 特征标理论、Cartan-Brauer 三角形的基本性质和分块理论；拓扑群的表示理论，包括紧致拓扑群的表示与特征标理论，Peter-Weyl 定理和局部紧致交换群的对偶理论等. 为了方便读者，本书力求自成系统，在第一章较系统地介绍了群论、模与代数的基础知识；在附录中简要介绍了拓扑空间、射影极限和 Zorn 引理等内容. 本书每节后都附有适量的习题，以帮助读者理解和拓广正文的内容.

读者只要具备良好的线性代数基础，就可以阅读使用本书. 本书可作为高等院校数学系、物理系研究生与高年级本科生学习有限群表示论或拓扑群表示论的教科书，也可供相关专业的科学工作者与高校教师阅读.

前　言

我国实行学位制度以来，研究生教育有了很大的发展。人们逐渐认识到：拓宽研究生的知识面是时代发展的需要。许多数学硕士点和博士点都要求在研究生阶段设立专业基础课程，使得不同专业、不同专题方向的研究生能对本专题以外的重要的、带基础性的近代发展也有所了解。

开设这类研究生专业基础课程的教材，当然是要介绍该方面的基本概念和基本方法。但在涉及近代的发展上不应过于专门，要照顾到各个不同分支的需要；也不能过于拘泥在技术细节上的推导，而是要在总体上、思想方法上给读者对该学科的主要内容有一个清晰的了解。因此在编写这类教材时，在深与广、精与粗、全貌与专题等方面要掌握适度才能使大多数来自不同专题方向的学生受益。

国内过去出版的大量为本科生编写的教材，因其没有反映近代的内容，不能满足需要；就是许多为研究生编写的教材，因其过分专门而不适用。可喜的是最近几年，出现了一批经过一段教学实践检验后符合上述要求的研究生专业基础课讲义。出版《天元研究生数学丛书》就是为了推动这类教材的编写，促进我国数学研究生培养水平的提高，希望得到数学界同仁们共同的关心和支持。

1995年3月于北京

序 言

群表示论是一个历史久远、联系广泛、前景灿烂的数学分支。

早在 1807 年，J. B. Fourier 为了研究从物理学中产生的偏微分方程的解，他在法国科学院创立了一种新的数学方法，后人称之为调和分析。他把周期为 1 的实变数复函数 $f(x)$ 分解为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n e^{i2\pi nx}。$$

而实变数 x 的函数

$$\varphi_n(x)=e^{i2\pi nx},\quad n\in\boldsymbol{Z}$$

正是 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 的全部不可约线性表示。因此，古典的调和分析本质上是群 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 的表示理论。至于群表示论中的特征标理论，其渊源可以追溯得更早。Gauss 早在 1801 年就在数论的研究中运用了特征标理论。后来，Dirichlet 运用特征标理论证明了数论中著名的 Dirichlet 定理——非退化的算术级数中总有无限多个素数。

尽管如此，人们还是认为群表示论的创立是从 Frobenius 开始的。在 1896 年及以后的几年里，他系统地建立了有限群的表示理论，并以此来研究有限群的结构。后来，他的学生 Schur 继承了 Frobenius 的工作，建立了非交换群的特征标理论，不但使有限群的表示理论日趋完整，而且还与 Weyl 一起在 1924～1927 年间把 Frobenius 的理论推广到紧致李群的表示，开创了连续群的表示理论。紧接着，Peter 与 Weyl 在 1927 年发现了紧致群表示中著名的 Peter-Weyl 定理，使紧致群上的调和分析有了坚实的基础。与此同时，Weyl 与物理学家 Wigner 分别运用 Frobenius 的理论到新兴的量子力学上去。从此以后，群表示论在三个方向上取得了蓬勃的发展和深刻的应用。

（一）有限群的模表示理论。Schur 在二十年代已经提出了有限群的模表示，他的学生 Brauer 继承和发展了 Schur 的工作，系统地创立了有限群的模表示理论。半个多世纪以来，许多数学家在这个方向做了不少工作，使群表示论在群的结构理论的研究中成为一个强有力的工具，尤其在单群分类问题的圆满解决中发挥了重要的作用。

（二）连续群的表示理论。有了紧致群上的表示理论，由于许多重要的李群并不是紧致的，而是局部紧致的，人们自然要考虑局部紧致群的表示理论。问题的关键是要在局部紧致群上建立不变积分。1933 年，Harr 建立了局部紧致群上的 Harr 测度，为局部紧致群上的调和分析提供了坚实的基础。接着，Понтрягин 在 1934 年建立了局部紧致交换群上的对偶理论，完成了局部紧致交换群上的表示理论，解决了交换李群的 Hilbert 第五问题。后来在 1946 年，Burgman 以及 Гельфанд 与 Наимарк 的工作创立了非紧致的局部紧致群上的无限维酉表示理论。因为它与理论物理、代数数论、自守函数、模形式、以至类域论等有着非常密切的关系，所以近半个世纪以来，一直长盛不衰。尤其是 Langlands 在 1967 年的工作，用群表示论的语言叙述和扩充了由 Hecke 建立起来的数论理论，使群表示论更加显得光辉灿烂。他在那一年还用一系列猜想的形式提出了所谓的“Langlands 计划”。正如 Klein 在 1872 年提出“Erlangen 计划”一样，“Langlands 计划”将长远地指引着数学的这个领域的发展。而“Langlands 计划”的核心之一是李群的无限维表示。

（三）群表示论在理论物理上的应用。自从 Wigner 与 Weyl 在 1927 年把 Frobenius 的理论应用到由 Heisenberg 与 Schrödinger 所发现的新的量子力学上以后，Weyl 在 1928 年完成了量子力学中的经典著作“群论和量子力学”，在 1939 年，他又完成了经典著作“典型群——它的表示与不变量”。就在这一年，Wigner 确定了 Poincaré 群的所有不可约线性表示。近年来，群表

示论在核结构、固体物理、场论中也有深刻的应用。因此，群表示论几乎成为理论物理学家的必需的基础。

为了与群表示论的这段光辉灿烂的历史和波澜壮阔的前景相适应，我们想到应该有一本比较全面又比较简明的介绍群表示论的教科书。作为一种尝试，我们编写了这本教材，作为学习研究群表示论的一个入门向导，供对于群表示论感兴趣的各专业研究生和高年级大学生作为教材使用。

本书的内容是这样安排的：第一章作为预备知识，比较全面地介绍了群论、模与代数的基础知识，以适应非数学专业研究生阅读使用本书的需要，使得他们在学习表示论时不致感到困难，而只要求读者具备良好的线性代数的基础知识即可。第二章介绍了有限群的常表示论的基本内容，为了避免使用更多的数学知识，我们只讨论有限群在复数域上的表示理论，包括线性表示的基本概念、特征标理论和诱导表示的一系列重要结果，例如 Frobenius 互反性、Mackey 子群定理、Clifford 定理、Artin 定理与 Brauer 定理等等。第三章讨论了有限群的模表示理论，包括 Brauer 特征标理论以及 Cartan-Brauer 三角形的定义和基本性质。此外，还简单地介绍了分块理论，包括 p-块的定义、块的亏数与亏群。第四章介绍了拓扑群的概念及其表示理论，特别是紧致拓扑群的表示与特征标理论，以及著名的 Peter-Weyl 定理。此外，还介绍了局部紧致交换群的对偶理论。第三章与第四章的内容是互相独立的，读者在学习时可以根据需要，或者只读第一、二、三章，或者只读第一、二、四章。

本书的每节末都附有少量习题，一方面是供读者巩固所学的内容使用的，另一方面是为了补充正文叙述上的不足而设的。

本书在内容的选择上尽量做到少而精，在内容的叙述上尽量做到深入浅出。但是，限于笔者的水平，谬误不足之处在所难免，希望数学界同行批评指正。

最后，我们要感谢数学天元基金对于本书出版工作的财政资

助，也要感谢华东师范大学数学系和同济大学应用数学系在作者写作此书期间所给予的支持。同时，我们也要对首都师范大学石生明教授表示衷心的感谢，他仔细地审阅了书稿，并提出了许多十分宝贵的修改意见。研究生陈慜仔细校读了手稿并协助编写了书末的索引和符号表，在此表示感谢。

作　者

1995 年 9 月

目　　录

第一章　预备知识 ………………………………………………… (1)

§1　群论基础 ………………………………………………… (1)

§2　代数与模 ………………………………………………… (16)

§3　代数与模(续) ………………………………………… (26)

第二章　有限群的常表示 …………………………………… (39)

§1　线性表示的定义与例子 …………………………… (39)

§2　特征标理论 ……………………………………………… (48)

§3　群代数与表示环 ……………………………………… (63)

§4　诱导表示及其特征标 ……………………………… (69)

§5　Mackey 子群定理 ……………………………………… (78)

§6　Artin 定理与 Brauer 定理 ………………………… (90)

第三章　有限群的模表示 …………………………………… (101)

§1　基本概念 ………………………………………………… (101)

§2　Cartan-Brauer 三角形 ……………………………… (109)

§3　Brauer 特征标理论 ………………………………… (114)

§4　k[G]的块 ………………………………………………… (124)

§5　块的亏数与亏群 ……………………………………… (131)

第四章　拓扑群及其线性表示 ……………………………… (141)

§1　拓扑群 …………………………………………………… (141)

§2　拓扑群上的不变积分 ……………………………… (156)

§3　紧致拓扑群的线性表示 …………………………… (166)

§4　局部紧致的拓扑交换群 …………………………… (178)

附录 A　拓扑空间 …… (192)
附录 B　Zorn 引理 …… (199)
附录 C　射影极限 …… (201)
汉英名词索引 …… (202)
符号说明 …… (214)
参考文献 …… (219)

第一章　预备知识

群表示论与许多数学分支都有十分紧密的联系. 为了方便读者学习时参考,也为了让读者对群表示论的数学背景有更深入的了解,我们汇集了有关的基础知识作为本书的第一章.

§1　群论基础

群的概念是代数研究中最基本的概念之一. 设 G 是一个非空集合,在 G 上定义了一个二元运算,即定义了一个映射 $G\times G\to G$,它把 G 中任意一对元素 (a,b) 映为 G 中一个确定的元素,记为 ab(乘法记号,称为 a 与 b 的积),或记为 $a+b$(加法记号,称为 a 与 b 的和), $a\circ b$, $a\times b$ 等等.

定义 1.1　一个非空集合关于一个二元运算(不妨叫做乘法)成为**群**,如果

(1) 结合律成立,即对于 G 中任意的三个元素 a,b,c,有

$$a(bc)=(ab)c;$$

(2) G 中包含一个**恒等元** 1,对于 G 中每个元素 a,有

$$1a=a1=a;$$

(3) 对于 G 中每个元素 a,在 G 中存在**逆元** a^{-1},使

$$aa^{-1}=a^{-1}a=1.$$

特别,当群 G 的二元运算还满足交换律时,即对于 G 中任意两个元素 a,b,有

$$ab=ba$$

时,便称 G 为**交换群**或 **Abel 群**.

群 G 所包含元素的个数 $|G|$ 称为 G 的**阶**. 如果 $|G|$ 是一个有

限整数,就称 G 为**有限群**;否则,就称 G 为**无限群**.

对于群 G 的任意元素 a,如果存在最小的正整数 m,使

$$a^m=1,$$

则称 a 的**阶**为 m. 如果不存在这样的 m,则称 a 为**无限阶元素**.

定义 1.2 群 G 的一个非空子集 H,如果关于 G 的乘法成为群,则称 H 为 G 的一个**子群**,记为 $H<G$.

显然,G 的一个非空子集 H 是 G 的子群当且仅当对于任意的 $a,b\in H$,有 $ab^{-1}\in H$.

若 S 是群 G 的一个子集,G 的所有包含 S 的子群的交还是一个子群,它是 G 的所有包含 S 的子群集合中最小的子群,称为**由 S 生成的子群**,记作 $\langle S\rangle$. 特别,当 $G=\langle S\rangle$ 时,称 S 中的元素为 G 的**生成元**,并称 G 为**由 S 生成的群**. 这时,G 的元素是形如 $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\cdots a_t^{n_t}$ 的有限乘积,$a_i\in S,n_i\in \mathbf{Z},i=1,\cdots,t$. 又若 S 是有限集时,称 G 为**有限生成的群**.

设 H 是 G 的一个子群,对任意的 $x\in G$,记

$$xH=\{xh\mid h\in H\}(\text{或 } Hx=\{hx\mid h\in H\}),$$

则称 xH(或 Hx)为以 x 为代表元的关于 H 的**左陪集**(或**右陪集**).

群 G 关于它的一个子群 H 可以分解成左陪集(或右陪集)的并,即

$$G=\bigcup_{i\in I}a_iH \quad (\text{或 } G=\bigcup_{j\in J}Hb_j),$$

其中 I(或 J)为某指标集. 易知:

映射 $Ha\mapsto a^{-1}H$ 是 G 关于 H 的右陪集的集合与左陪集的集合之间的一一映射,从而 G 关于 H 的左陪集的个数等于右陪集的个数,它们或者是相等的有限整数,或者是无限的. 通常把这个数目称为 H 在 G 里的**指数**,记为$[G:H]$. 此外,映射 $h\mapsto ha$ 是 H 与右陪集 Ha 之间的一一映射. 于是读者容易证明

定理 1.3 (1) G 中任意两个元素 a 与 b 在 G 关于 H 的同一

个左陪集(或右陪集)中的充分必要条件是 $a^{-1}b\in H$(或 $ab^{-1}\in H$);

(2)(Lagrange) 有限群 G 的子群 H 的阶是 G 的阶的一个因子,特别

$$|G|=|H|[G:H];$$

(3) 阶为 n 的有限群 G 的每个元素 a,有 $a^n=1$. ▍

定义 1.4 群 G 的子群 N 称为**正规子群**,记作 $N\lhd G$,如果对于 G 的每个元素 a,有

$$Na=aN.$$

这时,G 关于 N 的左陪集(或右陪集)就称为**陪集**. 容易验证,当 $N\lhd G$ 时,如果定义陪集的乘法

$$(Na)(Nb)=Nab,$$

那么 G 关于 N 的陪集的集合在上面定义的乘法下成群,通常称为 G 关于 N 的**商群**,记为 G/N.

例 1 n 阶**循环群** C_n. 它由某个元素 a 生成,即

$$C_n=\{a,a^2,\cdots,a^{n-1},a^n=1\},$$

它可以作为绕一个轴旋转 $2\pi/n$ 角的旋转所成的群来实现. 这是一个 Abel 群,记作 $C_n=\langle a\rangle$.

例 2 **二面体群** D_n. 它是由两个元素 a 与 b 生成的 $2n$ 阶群,其中生成元 a 与 b 满足关系式

$$a^n=1,\quad b^2=1,\quad aba=b,$$

即

$$D_n=\{a,a^2,\cdots,a^{n-1},a^n=1,b,ba,\cdots,ba^{n-1}\}.$$

二面体群可以作为平面上保持一个正 n 边形不变的旋转和反射所成的群,它包含 n 个旋转(它们成为一个与 C_n 同构的子群),还包含 n 个反射. 如果用 a 表示旋转 $2\pi/n$ 角的旋转,b 表示任意一个反射,那么 $a,a^2,\cdots,a^n$ 表示 n 个旋转,$b,ba,\cdots,ba^{n-1}$表示 n 个反射.

二面体群也可以作为空间的刚体运动的群来实现. 设 O-XYZ

是空间直角坐标系，e_x, e_y, e_z 是**正规正交基**.

(1) 令 a 表示绕 OZ-轴旋转 $2\pi/n$，b 表示关于 OXZ 平面的反射，那么 a 与 b 在所选取的基下的矩阵是

$$a=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{2\pi}{n} & -\sin\dfrac{2\pi}{n} & 0\\ \sin\dfrac{2\pi}{n} & \cos\dfrac{2\pi}{n} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(2) 令 a 表示绕 OZ-轴旋转 $2\pi/n$，b 表示关于 OX-轴的反射，那么 a 与 b 在所选取的基下的矩阵是

$$a=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{2\pi}{n} & -\sin\dfrac{2\pi}{n} & 0\\ \sin\dfrac{2\pi}{n} & \cos\dfrac{2\pi}{n} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(3) 令 a 表示绕 OZ-轴旋转 $2\pi/n$，b 表示关于 OYZ 平面的反射，那么 a 与 b 在所选取的基下的矩阵是

$$a=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{2\pi}{n} & -\sin\dfrac{2\pi}{n} & 0\\ \sin\dfrac{2\pi}{n} & \cos\dfrac{2\pi}{n} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

由此可见，引起许多物理学家和化学家注意的**点群**中的绝大部份，本质上是循环群 C_n 或二面体群 D_n，只是对 n 的取值稍加限制罢了.

例 3　对称群 S_n. 它是 n 个文字的集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上所有一一对应(也叫**置换**)所成的群. 一个 n 元置换可以写成

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix},$$

如果它使 $1\mapsto k_1, 2\mapsto k_2, \cdots, n\mapsto k_n$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 取遍 $\{1,2,$

$\cdots,n\}$. 如果一个 n 元置换使得 $i_1\mapsto i_2,\ i_2\mapsto i_3,\cdots,i_{k-1}\mapsto i_k,\ i_k\mapsto i_1$，而使其余的文字不动，那么称它为一个 **$k$-轮换**，记为 $(i_1,i_2,\cdots,i_k)$. 特别，当 $k=2$ 时，称为**对换**. 容易证明每一个 n 元置换可以写成若干个互相没有公共文字的轮换的积，进一步可以写成对换的积. 因此，S_n 是由 $n-1$ 个对换

$$(1\ 2),(1\ 3),\cdots,(1\ n)$$

作为生成元生成的 $n!$ 阶群. 对所有互不相同的 i,j,k，它们满足关系式

$$(1\ i)^2=1,\quad ((1\ i)(1\ j))^3=1,$$
$$((1\ i)(1\ j)(1\ i)(1\ k))^2=1.$$

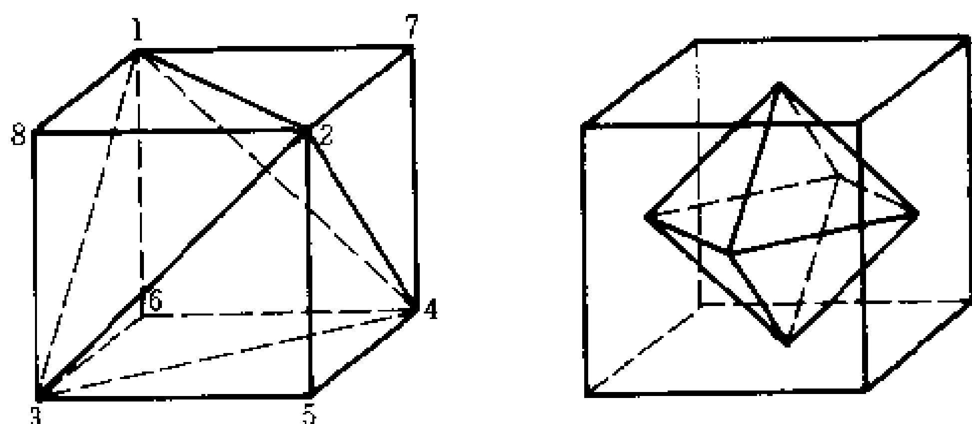
一个 n 元置换可以写成奇数个（或偶数个）对换的乘积时，称为**奇置换**（或**偶置换**）. 容易验证 S_n 中所有偶置换的集合 A_n 是 S_n 的指数为 2 的正规子群，通常称为**交错群**.

例如，$n=4$ 时，S_4 的全体元素用轮换的形式写出来是：

1. (1)；
2. $(1\ 2),(3\ 4),(1\ 3),(2\ 4),(1\ 4),(2\ 3)$；
3. $(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2),(1\ 3\ 4),(1\ 4\ 3),(1\ 2\ 4),(1\ 4\ 2)$, $(2\ 3\ 4),(2\ 4\ 3)$；
4. $(1\ 2\ 3\ 4),(1\ 2\ 4\ 3),(1\ 3\ 2\ 4),(1\ 3\ 4\ 2)$, $(1\ 4\ 2\ 3),(1\ 4\ 3\ 2)$；
5. $(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)$，

其中第 1,3,5 类的元素构成交错群 A_4，它可以作为使一个重心在原点的正四面体不变的旋转所成的群——**四面体群**——实现. 这时，第 5 类的 3 个 2 阶元素相当于正四面体绕经过两对边中点连线旋转 π 的旋转；第 3 类的 8 个 3 阶元素相当于绕联结一个顶点和对面重心的连线旋转 $\pm\frac{\pi}{3}$ 的旋转，从而 A_4 与四面体群同构.

如果我们考虑使正六面体不变的旋转所成的群，由于这个正六面体的六个面的中心恰好成为正八面体的顶点（见下图右图），



因此 24 个使正八面体不变的旋转组成的**八面体群** O 恰好与使正六面体不变的旋转所成的群同构，从而与对称群 S_4 同构. 这时，第 2 类的元素对应于联结两相对边（例如上图左图中的边 28 与 46）的中点的直线为轴旋转 π；第 3 类的元素对应于联结两相对顶点（例如上图左图中的顶点 1 与 5）的直线为轴旋转 $\pm\frac{\pi}{3}$；第 4 类的元素对应于联结两相对面（例如上图左图中的面 1827 与 6354）的中心的直线为轴旋转 $\pm\frac{\pi}{4}$；第 5 类的元素对应于联结两相对面的中心的直线为轴旋转 π. 注意到顶点 $\{1,2,3,4\}$ 形成一个正四面体，因此八面体群 O 包含一个指数为 2 的子群，它由置换顶点 $\{1,2,3,4\}$ 的那些旋转组成，从而与四面体群同构，即前面所述的交错群 A_4.

进一步容易看出，

$$K=\{(1),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}$$

和

$$H=\{(1),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}$$

都是 A_4 的子群，并且 H 是正规子群. 我们还有左陪集分解

$$\begin{aligned}A_4 &= H\cup(1\ 2\ 3)H\cup(1\ 3\ 2)H\\ &= K\cup(1\ 2)(3\ 4)K\cup(1\ 3)(2\ 4)K\cup(1\ 4)(2\ 3)K.\end{aligned}$$

例 4 **一般线性群** $GL_n(F)$ 是域 F 上所有 n 阶可逆矩阵关于矩阵乘法所成的群，它包含一个叫做**特殊线性群**的正规子群

$SL_n(F)$，这是由所有行列式等于1的n阶矩阵构成的. 如果考虑域F上所有n阶矩阵关于矩阵加法所成的群，就是**n阶矩阵群**，记为$M_n(F)$.

同态是群论研究中的又一个重要概念.

定义 1.5 设G与G'是两个群，φ是群G到G'内的一个映射，满足

$$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b), \quad a,b\in G,$$

则称$\varphi: G\to G'$为G到G'的一个**同态**.

这时，令

$$\mathrm{Ker}\varphi=\{a\in G \mid \varphi(a)=1', 1'\text{是}G'\text{的恒等元}\}\subset G,$$

$$\mathrm{Im}\varphi=\{\varphi(a)\mid a\in G\}\subset G',$$

那么，同态φ的**核**$\mathrm{Ker}\varphi$与**像**$\mathrm{Im}\varphi$分别是G与G'的子群. 特别，$\mathrm{Ker}\varphi$是G的正规子群. 如果$\mathrm{Ker}\varphi=\{1\}$，就称$\varphi$为**单一同态**；如果$\mathrm{Im}\varphi=G'$，就称$\varphi$为**满同态**；如果$\varphi$既是单一同态，又是满同态，就称$\varphi$为**同构**.

例 5 对任意的$A\in GL_n(F)$，定义

$$\varphi(A)=\det(A),$$

即A的**行列式**，由

$$\det(AB)=\det(A)\det(B),$$

可知φ是$GL_n(F)$到F^*（$=GL_1(F)$，即域F中非零元素所成的乘法群）的同态. 这个同态的核是$SL_n(F)$，因此$SL_n(F)\lhd GL_n(F)$.

例 6 对任意的$A\in M_n(F)$，定义

$$\varphi(A)=\mathrm{tr}(A),$$

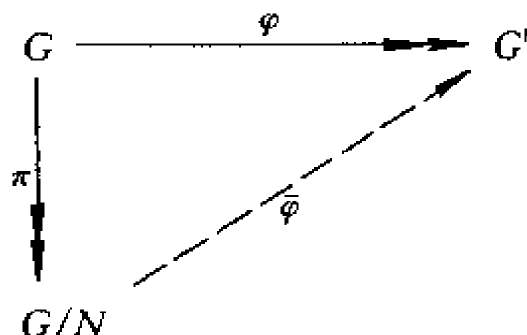
即A的**迹**，由

$$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B),$$

可知φ是$M_n(F)$到$F(=M_1(F))$的同态，这里把域F看作加法群.

定理 1.6（同态基本定理） 设$\varphi: G\to G'$是群的满同态，$N=\ker\varphi$，则诱导映射$\bar{\varphi}(aN)=\varphi(a)\ (a\in G)$是商群$G/N$到$G'$的同构. ▍

如果把 $\pi(a)=aN$ 定义的 G 到 G/N 的满同态称为**自然同态**，就有下面同态的交换图



即存在 $\bar{\varphi}$，使 $\varphi=\bar{\varphi}\circ\pi$. ▌

由于 $aN=bN$ 时，$a^{-1}b\in N$，从而 $\varphi(a^{-1}b)=1$，即 $\varphi(a)=\varphi(b)$，于是 $\bar{\varphi}(aN)=\bar{\varphi}(bN)$，$\bar{\varphi}$ 确实是一个映射，且满足 $\varphi=\bar{\varphi}\circ\pi$. 因此，读者容易验证 $\bar{\varphi}$ 是 G/N 到 G' 上的同构.

推论 1.7 设 $\varphi: G\to G'$ 是群的满同态，$N=\mathrm{Ker}\varphi$，那么 φ 给出 G 中所有包含 N 的子群的集合与 G' 中所有子群的集合之间的一个一一映射：$H\mapsto\varphi(H)$，$\forall\ N<H<G$. 在这个对应下，$H\lhd G$ 当且仅当 $\varphi(H)\lhd G'$. ▌

设 $H<G$，$N<G$，容易验证

$$HN=\{hn\mid h\in H, n\in N\}$$

是 G 的一个子群. 于是，由同态基本定理有

推论 1.8 (1) 设 $H<G$，$N\lhd G$，则有同构

$$HN/N\cong H/H\cap N;$$

(2) 设 $H<G$，$N\lhd G$，$N<H$，则有同构

$$G/H\cong(G/N)/(H/N).\quad ▌$$

我们把这两个推论的证明留给读者作为练习.

设 X 是任意一个非空集合，集合 X 到自身的一一映射全体组成一个群 $S(X)$，称为集合 X 上的对称群. 特别，当 $X=\{1,2,\cdots,n\}$ 时，$S(X)=S_n$. 下面我们讨论群 G 在集合 X 上的作用，它与群表示论有着十分密切的联系.

定义 1.9 设 G 是一个群，X 是一个非空集合，如果存在映射 $G\times X\to X$ 使得 $(a,x)\mapsto a(x)$ 满足

(1) $1(x)=x,\quad x\in X$;

(2) $ab(x)=a(b(x)),\quad a,b\in G, x\in X$,

那么，我们称**群 G 作用在集合 X 上**.

给出群 G 在集合 X 上的作用，相当于给出了群 G 到集合 X 上的对称群 $S(X)$ 的一个同态 $\eta: G\to S(X)$. 因为 G 的每个元素 a 确定了集合 X 到自身的映射 $\eta(a): x\mapsto a(x)$，由

$$a^{-1}(a(x))=a(a^{-1}(x))=1(x)=x,\quad x\in X$$

保证了 $\eta(a)$ 是 X 到自身的一一映射，即 $\eta(a)\in S(X)$. 又由

$$ab(x)=a(b(x))$$

保证了 $\eta(ab)=\eta(a)\eta(b)$，即 η 是一个群同态.

反之，给出群 G 到 $S(X)$ 的一个同态 $\eta: G\to S(X)$，通过定义

$$a(x)=\eta(a)(x),\quad a\in G, x\in X$$

决定了群 G 在集合 X 上的作用. 因此，我们就把同态 η 的核 $\mathrm{Ker}\eta$ 称为群 G 在 X 上作用的核.

当群 G 作用在集合 X 上时，通过 $x\sim y$ 当且仅当存在 $a\in G$ 使得 $y=a(x)$，在 X 上定义了一个等价关系，这个等价关系所决定的以 x 为代表元的等价类就是

$$Gx=\{a(x)\mid a\in G\},$$

它称为 x 的 **G-轨道**. 显然，集合 X 是所有不同的轨道的并. 如果轨道 $Gx=\{x\}$，那么 x 称为 G 的**不动元素**，X 中所有 G 的不动元素的集合记为 X^G. 如果集合 X 本身恰好是一个轨道，那么称 G 在 X 上的作用是**传递的**. 此外，对于集合 X 中任意元素 x，

$$\mathrm{Stab}_G x=\{a\in G\mid a(x)=x\}$$

是 G 的一个子群，称为元素 x 的**稳定子群**.

又设 X 与 X' 是两个非空集合，群 G 同时作用在这两个集合上. 如果存在一个一一映射 $\varphi: X\to X'$，使得

$$\varphi(a(x))=a(\varphi(x)),\quad a\in G, x\in X,$$

那么,称 G 在这两个集合上的作用是**等价**的.

例 7 设 $X=G$,定义 $a(x)=ax$, $a,x\in G$. 它给出了群 G 在它自身上的一个作用,称为**左平移**. 如果定义 $a(x)=xa^{-1}$, $a,x\in G$,这同样给出了群 G 在它自身上的一个作用,称为**右平移**.

例 8 设 $X=G$,定义

$$a(x)=axa^{-1},\quad a,x\in G,$$

它称为群 G 在它自身上的**共轭**作用. 这时,包含 x 的轨道称为 x 所在的**共轭类**,其中的元素个数记为 $c(x)$;x 在群 G 中的稳定子群 $\mathrm{Stab}_G x$ 就称为 x 的**中心化子**,记为 $Z_G(x)$,而这个作用的核则称为群 G 的**中心**,记为 $Z(G)$.

例 9 设 G 是一个群,$H<G$,G 按子群 H 分解成左陪集(或右陪集)的集合 $G\backslash H=\{xH\mid x\in G\}$(或 $H\backslash G=\{Hx\mid x\in G\}$),通常称为 G 关于 H 的左陪集空间(或右陪集空间). 通过

$$a(xH)=axH(\text{或 } a(Hx)=Hxa^{-1}),\quad a,x\in G$$

定义群 G 在左陪集空间 $G\backslash H$(或右陪集空间 $H\backslash G$)上的作用. 这个作用的核恰好是 G 的含在 H 中的最大正规子群.

例 10 设群 G 作用在集合 X 上,$Y\subset X$ 是 X 的一个在 G 作用下稳定的子集,即对任意的 $x\in Y$ 和 $a\in G$,有 $a(x)\in Y$. 于是,可以把 G 的作用限制于子集 Y 上. 特别,$Y=Gx$ 恰好是一个轨道. 此外,可以定义 G 在 X 的幂集合 $\mathscr{P}(X)$上的诱导作用: 对于 X 的非空子集 S 和 $a\in G$,定义 $a(S)=\{a(x)\mid x\in S\}$,对于空集 $\varnothing$,定义 $a(\varnothing)=\varnothing$.

定理 1.10 设群 G 作用在集合 X 上,$x\in X$,则群 G 在 Gx 上的限制作用与群 G 在左陪集空间 $G\backslash\mathrm{Stab}_G x$ 上的作用是等价的.

证明 考虑映射 $\varphi: G\backslash\mathrm{Stab}_G x\to Gx$,它使 $a\mathrm{Stab}_G x\mapsto a(x)$. 对任意的 $a,b\in G$,由于

$$\begin{aligned}a\mathrm{Stab}_G x=b\mathrm{Stab}_G x&\Longleftrightarrow a^{-1}b\in\mathrm{Stab}_G x\\&\Longleftrightarrow a^{-1}b(x)=x\Longleftrightarrow a(x)=b(x),\end{aligned}$$

从而 φ 是一一映射. 又由

$$a(\varphi(b\mathrm{Stab}_G x))=a(b(x))=ab(x)=\varphi(a(b\mathrm{Stab}_G x)),$$

故 G 在 Gx 上的作用与 G 在 $G\backslash\mathrm{Stab}_G x$ 上的作用等价. ▌

推论 1.11 设 G 是有限群, $H<G$, 则

(1) $x\in G$ 所在共轭类的元素个数 $c(x)=[G:Z_G(x)]$;

(2) 若 G 有 n 个不同的共轭类, 分别含 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 则有**类方程**

$$|G|=\sum_{i=1}^{n}[G:Z_G(x_i)];$$

(3) 若记 H 在 G 内的**正规化子** $N_G(H)=\{a\in G\mid aHa^{-1}=H\}$, 则 G 中共轭于 H 的子群个数是 $[G:N_G(H)]$.

证明 由定理 1.10, 当有限群 G 作用在有限集合 G 上时, 有

$$|Gx|=[G:\mathrm{Stab}_G x],\quad x\in G.$$

于是知推论成立. ▌

推论 1.12(Cayley) 每个群都同构于某个对称群的子群. 特别, 每个有限群都同构于 S_n 的一个子群, $n=|G|$.

证明 考虑 G 通过左平移作用在自身上, 它等价于给出一个单一同态 $\eta: G\to S(G)$, 使得 $\eta(a)(b)=ab$, $a,b\in G$. ▌

有限群 G 的阶是素数 p 的幂时, 称 G 为 **p-群**.

推论 1.13 设 p-群 G 作用在有限集合 X 上, $|X|=n$, 则

(1) 当 $(n,p)=1$ 时, X 中必有不动元素;

(2) 若 X 含有 t 个不动元素, 则 $t\equiv n(\mathrm{mod}\ p)$.

证明 设 G 在 X 上的作用含有 r 个轨道 $Gx_1,Gx_2,\cdots,Gx_r$, 其中 $Gx_1,Gx_2,\cdots,Gx_t$ 都只含一个元素, 即 $x_1,x_2,\cdots,x_t$ 是 G 的不动元素, $t\geqslant 0$. 于是

$$n=|X|=\sum_{i=1}^{r}|Gx_i|=t+\sum_{i=t+1}^{r}|Gx_i|.$$

当 $t+1\leqslant i\leqslant r$ 时, $\mathrm{Stab}_G x_i\subsetneqq G$. 但是 $|Gx_i|=[G:\mathrm{Stab}_G x_i]$, 且 $|G|=[G:\mathrm{Stab}_G x_i]|\mathrm{Stab}_G x_i|$, 于是 $p\mid[G:\mathrm{Stab}_G x_i]$, 即 $p\,\big|\,|Gx_i|$, 因

此 $t\equiv n \pmod{p}$，特别，当 $(n,p)=1$ 时，一定有 $t\neq 0$，从而推论成立. ∎

我们知道，有限群的子群的阶都是群的阶的因子. 对于任意的素数 p，$p\mid |G|$，有唯一的分解式 $|G|=p^r m$，使得 m 与 p 互素. 那么，G 是否含有阶为 p^r 的子群呢？这就是下面的 Sylow 定理所要解决的问题. 特别，我们把 G 的阶为 p^r 的子群称为 G 的 **Sylow p-子群**.

定理 1.14(Sylow) 设 G 是有限群，p 是一个素数，则

(1) 存在 Sylow p-子群；

(2) G 的全部 Sylow p-子群互相共轭；

(3) G 的每个 p-子群都含在一个 Sylow p-子群内.

证明 对 G 的阶作归纳法来证明(1). $|G|=1$ 是显然的，现在设 $|G|>1$，并设 $Z(G)$ 是 G 的中心. 若 $p\mid |Z(G)|$，由习题 5 知，$Z(G)$ 含一个 p 阶循环群 D. 由归纳假设表明商群 G/D 有一个 Sylow p-子群，它在自然同态 $\pi: G\to G/D$ 下的原像是 G 的一个 Sylow p-子群. 若 $p\nmid |Z(G)|$，由推论 1.11(2)，有

$$|G|=|Z(G)|+\sum_{i=1}^{s}[G:Z_G(y_i)],$$

其中 $y_1,\cdots,y_s$ 不在 G 的中心内，它们所在共轭类包含的元素个数大于 1. 于是存在 y_i 使得 $p\nmid [G:Z_G(y_i)]$，从而 $p^r\mid |Z_G(y_i)|$ 且 $|Z_G(y_i)|\lneqq |G|$. 归纳假设表明 $Z_G(y_i)$ 含一个阶为 p^r 的 Sylow p-子群，它就是 G 的一个 Sylow p-子群.

又设 P 是 G 的一个 Sylow p-子群，Q 是 G 的一个 p-子群. 考虑 p-子群 Q 通过左平移在左陪集空间 $X=G\backslash P$ 上的作用，由推论 1.13(1)，X 中有不动元素，于是存在 $a\in G$ 使

$$QaP=aP,$$

从而 $Q\subset aPa^{-1}$. 这就证明了(3). 进一步假定 Q 是 G 的另一个 Sylow p-子群，则 $|Q|=|aPa^{-1}|=p^r$，从而 $Q=aPa^{-1}$，证明了(2). ∎

回忆一下，群 G 称为**可解群**，如果存在 G 的一个子群序列

$$\{1\}=G_n<G_{n-1}<\cdots G_1<G_0=G$$

使得 $G_i<G_{i-1}$且 $G_{i-1}/G_i(1\leqslant i\leqslant n)$是 Abel 群.

如果进一步要求 $G_i\lhd G$ 且 $G_{i-1}/G_i<Z(G/G_i)(1\leqslant i\leqslant n)$，那么 G 称为**幂零群**.

显然，每个幂零群一定是可解群. 特别，每个 Abel 群是幂零群，每个有限 p-群也都是幂零群.

设 G 是一个群，H 与 N 是 G 的两个子群，如果

(1) $G=HN$；

(2) $H\cap N=\{1\}$；

(3) $hn=nh,\quad h\in H, n\in N$，

那么 G 是 H 与 N 的**直积**，记为 $G=H\ltimes N$.

如果用下面的(3)′来代替(3)，那么 G 是 H 与 N 的**半直积**，记为 $G=H\times N$.

(3)′ $hn=n'h,\quad h\in H, n, n'\in N$.

容易看到，在上述两种情形，G 中元素都可以唯一地表成 H 与 N 的元素的乘积. 在直积的情形，H 和 N 都是 G 的正规子群；而在半直积的情形，只有 N 是 G 的正规子群. 特别，当 G 是有限群时，

$$G|=|H||N|.$$

一个群 G 只含有 G 和$\{1\}$这样两个正规子群时，就称为**单群**. 群 G 的一个子群序列

$$\{1\}=G_n<G_{n-1}<\cdots<G_1<G_0=G$$

称为 G 的**合成列**，如果 $G_i\lhd G_{i-1}$且 $G_{i-1}/G_i(1\leqslant i\leqslant n)$是单群，并且把这些商群称为由这个序列决定的 G 的**合成因子**.

显然，G_{i-1}/G_i 是单群当且仅当 G_i 是 G_{i-1}的极大正规子群. 因此，对有限群 G 来说，合成列一定存在. 最后，我们证明重要的 Jordan-Hölder定理.

定理 1.15(Jordan-Hölder) 设 G 是一个有限群，又设

$$\{1\}=G_n<G_{n-1}<\cdots<G_1<G_0=G,$$
$$\{1\}=H_m<H_{m-1}<\cdots<H_1<H_0=G$$
是 G 的两个合成列，则 $m=n$ 且存在$\{1,2,\cdots,n\}$的一个置换 $i\mapsto i'$ 使得 $G_{i-1}/G_i\cong H_{i'-1}/H_{i'}(1\leqslant i\leqslant n)$.

证明 对$|G|$作归纳法并分两种情形来证明.

(1) 当 $G_1=H_1$ 时. 由归纳假设，对这个群的两个合成列
$$\{1\}=G_n<G_{n-1}<\cdots<G_1=H_1,$$
$$\{1\}=H_m<H_{m-1}<\cdots<H_1=G_1$$
有 $m-1=n-1$ 及$\{2,3,\cdots,n\}$的一个置换 $i\mapsto i'$ 使得
$$G_{i-1}/G_i\cong H_{i'-1}/H_{i'}(2\leqslant i\leqslant n).$$
但是，$G_0/G_1=H_0/H_1$，定理得证.

(2) 当 $G_1\neq H_1$ 时. 由于 G_1H_1 是 G 的正规子群，且 $G_1\trianglelefteq\neq G_1H_1$，$H_1\trianglelefteq\neq G_1H_1$. 但是，$G_1$ 与 H_1 都是 G 的极大正规子群，迫使 $G=G_1H_1$. 由推论 1.8(1)，$G/G_1=G_1H_1/G_1\cong H_1/(G_1\cap H_1)$，$G/H_1=G_1H_1/H_1\cong G_1/(G_1\cap H_1)$. 令 $K_2=G_1\cap H_1$，它分别是 G_1 与 H_1 的极大正规子群. 设
$$\{1\}=K_l<K_{l-1}<\cdots<K_3<K_2=G_1\cap H_1$$
是 K_2 的一个合成列，我们得到两个同构及群 G 的四个合成列
$$G_0/G_1\cong H_1/K_2,\quad H_0/H_1\cong G_1/K_2;$$

(i) $\{1\}=G_n<G_{n-1}<\cdots<G_2<G_1<G_0=G$,

(ii) $\{1\}=K_l<K_{l-1}<\cdots<K_2<G_1<G_0=G$,

(iii) $\{1\}=K_l<K_{l-1}<\cdots<K_2<H_1<H_0=G$,

(iv) $\{1\}=H_m<H_{m-1}<\cdots<H_2<H_1<H_0=G$.

由这两个同构知定理对合成列(ii)与(iii)成立. 又由(1)知定理分别对合成列(i)与(ii)，(iii)与(iv)成立，从而定理得证. ▍

定理告诉我们，不考虑先后次序，群 G 的任意两个合成列所决定的合成因子集合是相同的，就称为 G 的合成因子.

推论 1.16 有限群 G 是可解群的充分必要条件是 G 的合成

因子都是素数阶循环群.

证明 如果 G 的合成因子都是素数阶循环群,由定义知 G 是可解群. 反之,如果 G 是可解群,由习题 6 知 G 的每个合成因子是可解群,它既是单群又是 Abel 群,从而必须是素数阶循环群. ∎

习　题

1. 证明推论 1.7 和推论 1.8.

2. 若 x 是群 G 的 n 阶元素,则 x^k 的阶是

$$[n,k]/k=n/(n,k).$$

3. n 阶循环群 $\langle x\rangle$ 所含的生成元个数为 $\varphi(n)$,这里 φ 表示 **Euler-φ 函数**,$\varphi(n)$ 表示小于 n 又与 n 互素的正整数的个数.

4. 若 G 是有限群,H 与 K 是 G 的子群且 $K\subset H$,则

$$[G:K]=[G:H][H:K].$$

5. 若 G 是有限 Abel 群,p 是 $|G|$ 的一个素因子,则 G 包含 p 阶元素.

6. 证明:

(1) 可解群(或幂零群)的子群和同态像是可解群(或幂零群);

(2) 若 $K\lhd G$,且 K 和 G/K 都是可解群,则 G 是可解群;

(3) 若 $G/Z(G)$ 是幂零群,则 G 是幂零群.

7. 设 H 和 K 是群 G 的两个子群,证明

(1) 映射的集合 $\{x\mapsto hxk\mid h\in H,k\in K\}$ 是 G 的变换的群;

(2) x 关于这个变换群的轨道是 $HxK=\{hxk\mid h\in H,k\in K\}$,通常称为 G 的含 x 的关于 H 与 K 的**双陪集**;

(3) 若 G 是有限群,则 $|HxK|=|H|[K:x^{-1}Hx\cap K]$.

8. 设 $H\lhd G$,又设 $\mathfrak{C}$ 是 G 的一个共轭类. 证明: 若 $\mathfrak{C}\cap H\neq\varnothing$,则 $\mathfrak{C}\subset H$.

9. 设 A 与 B 是有限群 G 的正规子群使得 $(|A|,|B|)=1$. 证明: $A\cap B=\{1\}$,并且 $AB=A\times B$.

10. 设 G 是一个群，记

$$(G,G)=\langle xyx^{-1}y^{-1} \mid x,y\in G\rangle$$

是由所有形如 $xyx^{-1}y^{-1}$ 的元素生成的 G 的子群，它称为 G 的**换位子群**. 证明：若 G 是 p-群且 $G/(G,G)$ 是循环群，则 G 是循环群.

§2 代数与模

在学习群表示论时，除了群的概念以外，还涉及许多其他代数基本概念.

定义 2.1 一个非空集合 R 称为**环**，如果

(1) R 关于一个称为加法的二元运算成为 Abel 群；

(2) R 上定义了另一个称为乘法的二元运算，满足

乘法结合律

$$a(bc)=(ab)c,\quad a,b,c\in R,$$

左、右分配律

$$a(b+c)=ab+ac,\quad (b+c)a=ba+ca,\quad a,b,c\in R.$$

特别，当环 R 的乘法还满足交换律时，即

$$ab=ba,\quad a,b\in R,$$

则称 R 为**交换环**.

如果环 R 的乘法有恒等元 1，即对 R 中每个元素 a，它满足

$$1a=a1=a,$$

则称 R 为**有恒等元的环**.

通常把环 R 的加法恒等元称为**零元**，记为 0. 设 a,b 是 R 中非零元素，满足

$$ab=0,$$

则称 a 为 R 的一个**左零因子**，b 为 R 的一个**右零因子**（在不引起混淆时，也简称为**零因子**）. 在非交换环的情形，一个元素未必同时既是左零因子又是右零因子. 并不是每个环都有零因子，通常把一个有恒等元但没有零因子的交换环称为**整环**.

环 R 中非零元素关于乘法未必有逆元，我们把 R 中关于乘法有逆元的元素称为**可逆元**. 一个至少包含 2 个元素的有恒等元的环 R，如果 R 中每个非零元都是可逆元，那么，R 称为**除环**. 显然，在除环中没有零因子.

定义 2.2 一个交换除环称为**域**.

由于

$$\begin{aligned}(na)b &= (\underbrace{a+\cdots+a}_{n\text{个}})b=\underbrace{ab+\cdots+ab}_{n\text{个}}\\ &=a(\underbrace{b+\cdots+b}_{n\text{个}})=a(nb),\end{aligned}$$

域 F 中非零元素关于加法有相同的阶，或者都是无限的，或者都等于某个素数 p(试证明之). 这个公共的阶称为域 F 的**特征**. 在第一种情形，称域 F 的特征为 0，记为 $\mathrm{char}F=0$；在第二种情形，称域 F 的特征为 p，记为 $\mathrm{char}F=p$.

正如正规子群在群论中起着重要作用一样，**理想**在环论中也起着类似的作用.

定义 2.3 设 S 是环 R 的非空子集，如果 S 关于 R 中的加法和乘法是封闭的，那么 S 是 R 的**子环**. 如果对于 R 的子环 I，有

$$rx\in I(\text{或 } xr\in I),\quad r\in R, x\in I,$$

那么 I 是环 R 的**左理想**(或**右理想**). 如果 I 同时是左理想和右理想，就称 I 为**理想**.

设 X 是环 R 的子集，所有包含 X 的(左)理想的交仍是 R 的一个包含 X 的(左)理想，称为由 X 生成的(左)理想，记为 $\langle X\rangle$. 这时，如果 R 是有恒等元 1 的交换环，那么

$$\langle X\rangle=\left\{\sum_{i=1}^{t}r_ia_i\,\middle|\,r_i\in R, a_i\in X, i=1,\cdots,t, t\in N\right\}.$$

特别，当 X 是有限集时，称 $\langle X\rangle$ 为**有限生成(左)理想**. 由一个元素生成的理想 $\langle x\rangle$ 称为**主理想**. 如果一个环的每个理想都是主理想，这个环就称为**主理想环**. 又是整环的主理想环称为**主理想整环**.

我们把保持环的加法和乘法运算的映射称为环的**同态**. 设

$\varphi: R\to R'$是环 R 到环 R' 内的同态，则 $\mathrm{Im}\varphi$ 是 R' 的子环，$\mathrm{Ker}\varphi=\{r\in R\mid\varphi(r)=0\}$是环 R 的理想. 由于环同态也是它们作为加法群的同态，我们可以同样定义单一同态、满同态和同构，并且可以证明类似的同态基本定理.

设 I 是环 R 的理想，从而是 R 作为加法群的正规子群，在商群 R/I 中定义乘法为

$$(a+I)(b+I)=ab+I,\quad a,b\in R.$$

这样，R/I 成为一个环，通常称为 R 关于 I 的**商环**.

如果 R 是有恒等元的交换环，P 是 R 的理想且 $P\neq R$，当 $xy\in P$时有 $x\in P$ 或 $y\in P$，就称 P 是 R 的一个**素理想**. 如果 R 的一个理想 $M\neq R$，并且 R 中不存在使 $M\subsetneq I\subsetneq R$ 的理想 I，就称 M 是 R 的一个**极大理想**. 读者容易证明 P 是 R 的素理想当且仅当 R/P 是整环，M 是 R 的极大理想当且仅当 R/M 是域. 特别，当 R 只有唯一的极大理想时，称为**局部环**.

例 1 整数集合 $\mathbf{Z}$ 关于加法和乘法成为一个环，它是主理想整环. 偶数集合 $2\mathbf{Z}$ 是没有恒等元的交换环. 数域 F 上 n 阶矩阵的集合关于矩阵加法与乘法成为一个有恒等元的非交换环. 对每个正整数 n，$\mathbf{Z}$ 中模 n 剩余类的集合 Z_n 是一个环. 特别，当 $n=p$ 是素数时，Z_p 是特征为 p 的域.

例 2 设 A 是 Abel 群，$\mathrm{End}(A)=\{$同态 $f: A\to A\}$中定义加法为

$$(f+g)(a)=f(a)+g(a),\quad a\in A;$$

乘法为

$$(fg)(a)=f(g(a)),\quad a\in A.$$

那么 $\mathrm{End}(A)$是一个有恒等元 $\mathbf{1}_A$ 的环，其中 $\mathbf{1}_A: A\to A$ 是恒等自同态，而加法恒等元 $\mathbf{0}_A: A\to A$ 是零同态.

从现在起，我们假定环 R 是一个有恒等元的环.

定义 2.4 设 R 是一个环，M 是一个加法交换群，如果存在映射 $R\times M\to M$ 使得$(a,x)\mapsto ax$，满足

(1) $a(x+y)=ax+ay,\quad a\in R,x,y\in M$;

(2) $(a+b)x=ax+bx,\quad a,b\in R,x\in M$;

(3) $(ab)x=a(bx),\quad a,b\in R,x\in M$;

(4) $1x=x,\quad x\in M$,

就称 M 为环 R 上一个**左模**或一个**左 R-模**.

如果考虑映射 $M\times R\to M$ 使得$(x,a)\mapsto xa$,并满足类似于(1)～(4)的性质,就可以定义 M 为一个**右 R-模**. 当 R 是交换环时,由于 $b(ax)=(ba)x=(ab)x=a(bx)$,通过定义左(右)R-模 M 上的右(左)R-模结构为 $x\cdot a=ax(a\cdot x=xa)$可使得 M 上的左 R-模结构与右 R-模结构一致. 特别,当 R 是域时,R-模 M 就是域上向量空间,只要规定 R 在 M 上的作用是 R 中元素与 M 中向量的数量乘法就行了. 为方便计,我们只讨论左 R-模,并简称为 **R-模**. 关于右 R-模的结果完全与关于左 R-模的结果平行.

M 的一个非空子集 N 是 M 的 **R-子模**,如果

(1) N 是 M 的一个加法子群;

(2) 对任意的 $a\in R,x\in N$,有 $ax\in N$.

显然,$\{0\}$与 M 本身都是 M 的子模,它们是 M 的平凡子模. 除了平凡子模外,没有真子模的 R-模称为**单 R-模**. R-模 M 的子模的交仍是一个子模,而子模 N 与 P 的和,即形如

$$ax+by,\quad a,b\in R,x\in N,y\in P$$

的元素的集合也是 M 的一个子模. 特别,设 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in M$,那么,

$$N=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\,\middle|\,a_i\in R,\ 1\leqslant i\leqslant n\right\}$$

是 M 的一个**有限生成子模**,它由 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 生成,即

$$N=Rx_1+Rx_2+\cdots+Rx_n.$$

如果 $M=N$,就称 M 是一个**有限生成的 R-模**,$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$是 M 的一个生成元集.

设 N 与 P 是 R-模 M 的子模,使得

(1) $M=N+P$;

(2) $N\cap P=\{0\}$,

这时,我们称 M 是 N 与 P 的**直和**,记为 $M=N\oplus P$. 特别,当 N 与 P 都是非平凡的 R-子模时,称 M 是可以分解的 R-模;否则,就称 M 是**不可分解的 R-模**.

又设 N 是 R-模 M 的一个子模,N 作为 M 的加法子群是正规的,商群 M/N 仍是加法交换群,通过

$$a(x+N)=ax+N,\quad a\in R, x\in M,$$

使 M/N 成为 R-模,它称为 M 关于 N 的**商模**.

对于两个 R-模 M 与 M',如果存在 M 到 M' 内的映射 $\varphi: M\to M'$ 使得

(1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),\quad x,y\in M$;

(2) $\varphi(ax)=a\varphi(x),\quad a\in R, x\in M$,

就称 φ 为从 M 到 M' 的一个 **R-模同态**. 所有这样的 R-模同态的集合 $\mathrm{Hom}_R(M,M')$ 具有自然的加法交换群结构(试验证之). 与群的情形相平行,可以定义 R-模同态的核、像,定义 R-模的单一同态、满同态和同构,也有类似的 R-模同态基本定理.

定理 2.5 设 $\varphi: M\to M'$ 是 R-模满同态,$N=\mathrm{Ker}\varphi$ 是 M 的一个子模,则诱导映射 $\overline{\varphi}(x+N)=\varphi(x)\,(x\in M)$ 是商模 M/N 到 M' 上的同构,从而 φ 给出 M 中所有包含 N 的子模的集合与 M' 中所有子模的集合之间的一个一一映射. ▌

推论 2.6 设 H 与 N 是 R-模 M 的两个子模,则有 R-模同构

$$(H+N)/H\cong N/(H\cap N).$$

进一步假定 $N\subset H\subset M$,则有 R-模同构

$$(M/N)/(H/N)\cong M/H. \quad ▌$$

例 3 每个加法交换群 G 自然地成为一个 $\mathbf{Z}$-模,其中

$$na=\underbrace{a+\cdots+a}_{n个},\quad a\in G, n\in\mathbf{Z}.$$

环 R 中每个左理想 I 都是左 R-模. 特别,R 是一个左 R-模,

并且 R/I 也是左 R-模. 又设 S 是 R 的子环，则 R 是 S-模(但 S 未必是 R-模).

现在介绍 R-模的**张量积**. 设 M 是右 R-模，N 是左 R-模，定义 M 与 N 的**平衡积**为一个加法交换群 P 及映射

$$f : M\times N \rightarrow P,$$

满足：

(1) $f(m+m',n)=f(m,n)+f(m',n)$;

(2) $f(m,n+n')=f(m,n)+f(m,n')$;

(3) $f(mr,n)=f(m,rn)$,

其中 $r\in R$, $m,m'\in M$, $n,n'\in N$. 我们把这个平衡积记为 (P,f).

右 R-模 M 与左 R-模 N 的两个平衡积 (P,f) 与 (Q,g) 之间的态射

$$\eta : (P,f) \rightarrow (Q,g)$$

是从 P 到 Q 的加法交换群同态 $\eta : P\rightarrow Q$，对任意的 $m\in M,n\in N$，有

$$g(m,n)=\eta(f(m,n)).$$

定义 2.7 右 R-模 M 与左 R-模 N 的**张量积**是 M 与 N 的一个平衡积 $(M\otimes_R N,\otimes)$，它具有如下的普遍性质：对于 M 与 N 的任一个平衡积 (P,f)，存在唯一的态射

$$\eta : (M\otimes_R N,\otimes) \rightarrow (P,f).$$

易见 $M\otimes_R N$ 的元素是形如 $\sum_{i=1}^{t} m_i\otimes n_i$ 的有限和，其中 $m_i\in M,n_i\in N$. 对于 $m,m_1,m_2\in M,n,n_1,n_2\in N$ 及 $r\in R$，有

$$(m_1+m_2)\otimes n=m_1\otimes n+m_2\otimes n,$$

$$m\otimes(n_1+n_2)=m\otimes n_1+m\otimes n_2,$$

$$mr\otimes n=m\otimes rn.$$

我们可以证明右 R-模 M 与左 R-模 N 的张量积的存在性与唯一性，限于篇幅，不在这里赘述，有兴趣的读者可以参考[Ja2] p. 127.

设 $f: M \to M'$ 是右 R-模同态，$g: N \to N'$ 是左 R-模同态，则存在唯一的 Abel 群同态 $f \otimes g: M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$，使得

$$(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n), \quad m \in M, n \in N.$$

又设 $f': M' \to M''$ 是右 R-模同态，$g': N' \to N''$ 是左 R-模同态，则

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g) = f' \circ f \otimes g' \circ g: M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N''.$$

设 R 与 S 是环，加法交换群 M 既是左 S-模，又是右 R-模，且对所有的 $r \in R, s \in S, m \in M$，有

$$s(mr) = (sm)r,$$

则称 M 是 **S-R-双模**. 这时，对任意的左 R-模 N，张量积 $M \otimes_R N$ 成为左 S-模，它的左 S-模结构定义为

$$s(m \otimes n) = sm \otimes n, \quad s \in S, m \in M, n \in N.$$

我们把下面几个同构的证明留给读者作为练习.

(1) $R \otimes_R N \cong N, M \otimes_R R \cong M$；

(2) $(M \oplus M') \otimes_R N \cong M \otimes_R N \oplus M' \otimes_R N$,

$M \otimes_R (N \oplus N') \cong M \otimes_R N \oplus M \otimes_R N'$；

(3) $(M \otimes_R L) \otimes_S P \cong M \otimes_R (L \otimes_S P)$,

其中 M, M' 为右 R-模，N, N' 为左 R-模，P 为左 S-模，L 为 R-S-双模.

例 4 用域 F 来代替环 R，F-模就成为通常的 F 上向量空间. 显然，F 上向量空间 V 与 W 的张量积 $V \otimes_F W$ 仍是 F 上向量空间. 并且，若 $v_1, \cdots, v_m$ 是 V 的一个基，$w_1, \cdots, w_n$ 是 W 的一个基，则 mn 个向量 $v_i \otimes w_k (i=1, \cdots, m, k=1, \cdots, n)$ 成为 $V \otimes_F W$ 的一个基.

进一步设 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 分别是 V 与 W 上线性变换，$A=(a_{ij})$ 与 $B=(b_{kh})$ 分别表示线性变换 $\mathscr{A}$ 关于 V 的一个基 $v_1, \cdots, v_m$ 的矩阵与线性变换 $\mathscr{B}$ 关于 W 的一个基 $w_1, \cdots, w_n$ 的矩阵，即

$$\mathscr{A}(v_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j, \quad i = 1, 2, \cdots, m,$$

$$\mathscr{B}(w_l)=\sum_{k=1}^{n}b_{kl}w_k,\quad l=1,2,\cdots,n.$$

那么，$\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ 是 $V\otimes_F W$ 上的线性变换，它关于 $V\otimes_F W$ 的一个基 $\{v_i\otimes w_k\mid 1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant k\leqslant n\}$的矩阵是 $A\otimes B$，其中

$$A\otimes B=\begin{pmatrix}a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B\\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2m}B\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mm}B\end{pmatrix}$$

称为矩阵 A 与 B 的**张量积**，即

$$(\mathscr{A}\otimes\mathscr{B})(v_i\otimes w_l)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ji}b_{kl}v_j\otimes w_k.$$

显然，当 A 是 m 阶矩阵，B 是 n 阶矩阵时，$A\otimes B$ 是 mn 阶矩阵，且矩阵的迹满足

$$\mathrm{tr}(A\otimes B)=\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ii}b_{kk}.$$

最后，我们讨论有恒等元的交换环 R 上的代数.

定义 2.8 设 R 是有恒等元的交换环，**R-代数** A 是指

(1) A 是一个有恒等元的环；

(2) A 是一个 R-模；

(3) $r(ab)=(ra)b=a(rb),\quad r\in R,a,b\in A.$

如果用域 F 来代替环 R，那么 F-代数 A 是 F 上向量空间，当 A 作为 F-向量空间是有限维时，称 A 为 F 上**有限维代数**.

A 的一个子环 B，如果它又是 A 的 R-子模，那么称 B 为 A 的 **R-子代数**. A 的一个(左、右或双侧)理想 I，如果它又是 A 的一个 R-子模，就称 I 为 A 的**代数理想**. 一个 **R-代数同态**

$$\varphi: A\to B$$

是一个环同态，同时也是一个 R-模同态. 此外，我们可以定义 R-代数 A 关于它的一个代数理想 I 的**商代数** A/I，两个 R-代数 A 与 B 的**直和** $A\oplus B$ 以及**张量积** $A\otimes_R B$. 这里，我们仅仅给出 $A\otimes_R B$ 的定义，而把其余的细节留给读者.

R-代数 A 与 B 的张量积 $A\otimes_R B$ 是 R-模的张量积，由于 R 是交换环，它显然具有 R-模结构. 再定义 $A\otimes_R B$ 中元素的乘法为

$$(a\otimes b)(a'\otimes b')=aa'\otimes bb', \quad a,a'\in A, b,b'\in B.$$

于是，$A\otimes_R B$ 成为一个 R-代数.

例 5 每个环是 Z-代数.

设 G 是一个乘法群，R 是有恒等元的交换环. 构造加法交换群 $R[G]$ 如下：$R[G]$ 的元素是形如 $\sum_{x\in G} r(x)x$ 的有限和，其中 $r(x)\in R$ 且只有有限个不为零；$R[G]$ 中加法定义为

$$\sum_{x\in G} r(x)x+\sum_{x\in G} s(x)x=\sum_{x\in G}(r(x)+s(x))x,$$

乘法定义为

$$\Big(\sum_{x\in G} r(x)x\Big)\Big(\sum_{y\in G} s(y)y\Big)=\sum_{z\in G}\Big(\sum_{xy=z} r(x)s(y)\Big)z,$$

而 R 的纯量乘法定义为

$$r\Big(\sum_{x\in G} s(x)x\Big)=\sum_{x\in G}(rs(x))x,$$

其中 $r(x)+s(x)$，$r(x)s(y)$ 与 $rs(x)$ 分别是环 R 中的加法与乘法，而 xy 是群 G 中的乘法. 这样，$R[G]$ 成为一个 R-代数，通常称为 G 在 R 上的**群代数**. 特别，当 G 是有限群时，域 F 上的群代数 $F[G]$ 是一个有限维的 F-代数.

习　题

1. 设 M 是一个 R-模，$B=\{b\in R\mid bx=0, \forall\, x\in M\}$. 证明

(1) B 是 R 的一个理想；

(2) 若 C 是 R 的含在 B 内的理想，则通过 $\bar{a}x=ax\,(a\in R, x\in M)$ 在 M 上定义了 R/C-模结构.

2. 设 M 是加法交换群，证明仅有一种方法使 M 成为 Z-模.

3. 设 M 是一个 R-模，M_i 是 M 的子模使得 $M=\sum_{i=1}^{n} M_i$，并且

$$M_1\cap M_2=\{0\},$$

$$(M_1+M_2)\cap M_3=\{0\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(M_1+\cdots+M_{n-1})\cap M_n=\{0\}.$$

先把 R-模直和的概念推广到任意有限个子模的情形，再证明

$$M=\bigoplus_{i=1}^{n}M_i.$$

4. 设 G 是一个群，R 是一个有恒等元的交换环. 令 $\widetilde{R}[G]$是从 G 到 R 内的映射 f 的集合，除了有限个 $x\in G$ 外都有 $f(x)=0$. 在 $\widetilde{R}[G]$中定义加法、乘法、加法恒等元 $\mathbf{0}$ 与乘法恒等元 $\mathbf{1}$ 为

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$

$$(fg)(x)=\sum_{yz=x}f(y)g(z),$$

$$\mathbf{0}(x)=0,$$

$$\mathbf{1}(1_G)=1,\quad \mathbf{1}(x)=0,\quad x\neq 1_G,$$

其中 $f,g\in\widetilde{R}[G]$，$x,y,z,1_G\in G$.

证明 $\widetilde{R}[G]$是一个环，其中映射的集合

$$\{a'\in\widetilde{R}[G]\,|\,a'(1_G)=a,\ a'(x)=0,\ x\neq 1_G\}$$

是与 R 同构的子环，映射的集合

$$\{x'\in\widetilde{R}[G]\,|\,x'(x)=1,\ x'(y)=0,\ y\neq x\}$$

是 $\widetilde{R}[G]$的乘法子群，它与 G 同构.

如果进一步定义

$$(rf)(x)=rf(x),\quad r\in R,\ x\in G,\ f\in\widetilde{R}[G],$$

证明 $\widetilde{R}[G]$是一个 R-代数. 如果定义 $R[G]$到 $\widetilde{R}[G]$内的映射为

$$\sum_{x\in G}r(x)x\mapsto f:G\to R\text{ 使 }f(x)=r(x),\quad\forall\ x\in G,$$

证明它是一个 R-代数同构，从而 $\widetilde{R}[G]$就是 G 在 R 上的群代数.

5. 设 R 是有恒等元的交换环，G 是有限群，$\mathfrak{C}$ 是 G 的一个共轭类. 证明 $\sum_{x\in\mathfrak{C}}x$ 与 $\sum_{x\in G}x$ 是 G 在 R 上的群代数 $R[G]$的中心的元素.

6. 设 R 是一个环，M 与 M'是两个 R-模. 试在 $\mathrm{Hom}_R(M,M')$

中定义加法、乘法与纯量乘法，使它成为一个 R-代数；并在 $\mathrm{Hom}_R(M,M')$ 中定义加法与纯量乘法，使它成为一个 R-模.

7. 设 R 与 S 是环，M 是左 R-模，N 是左 S-模，L 是 S-R-双模，证明：存在典范同构

$$\mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_S(L,N)) \cong \mathrm{Hom}_S(L\otimes_R M,N).$$

8. 设 M 与 N 是域 F 上的向量空间. 证明：存在向量空间的典范同构 $M^*\otimes_F N\cong\mathrm{Hom}_F(M,N)$，其中 $M^*=\mathrm{Hom}_F(M,F)$ 是 M 的对偶空间.

9. 设 M 与 N 是域 F 上向量空间. 证明：若 $\{m_1,\cdots,m_r\}$ 在 M 中线性无关，则对于 $n_i\in N$，$\sum m_i\otimes n_i=0$ 时，有 $n_1=\cdots=n_r=0$.

10. 若 M 是一个单 R-模，则对每个 $m\in M$，$m\neq 0$，有 $M=Rm$.

11. 设 R 是一个有恒等元的环，$e_1,\cdots,e_n$ 在 R 的中心内，满足

$$1=e_1+\cdots+e_n,\quad e_i^2=e_i,\quad e_ie_j=0(i\neq j).$$

证明

$$R=Re_1\oplus\cdots\oplus Re_n,$$

并且每个 Re_i 是 R 的**双边理想**.

12. 设 G 是有限群，$R=Q[G]$ 是 G 在有理数域 Q 上的群代数，并且 $|G|>1$. 令

$$e_1=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}x,\quad e_2=e-e_1,$$

其中 e 是群 G 的恒等元. 证明：

(1) $e_1^2=e_1, e_2^2=e_2, e_1e_2=e_2e_1=0$；

(2) $R=Re_1\oplus Re_2$ 是 R 作为双边理想的直和的分解.

§3 代数与模(续)

在这一节里，我们将更深入地介绍代数与模的有关结果. 假定 R 是一个有恒等元的环.

一个有限生成 R-模 V 是**自由模**，如果 V 的生成元集$\{x_1,\cdots,x_t\}$是 R-自由的，即

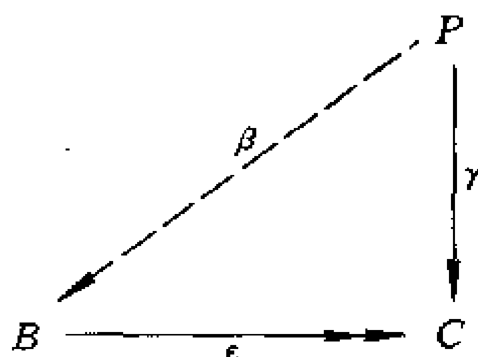
$$r_1x_1+\cdots+r_tx_t=0,\quad r_1,\cdots,r_t\in R$$

时，$r_1=\cdots=r_t=0$. 于是

$$V=Rx_1\oplus\cdots\oplus Rx_n,$$

并且每个有限生成 R-模 M 是某个有限生成自由 R-模 V 的商模. 通常把生成元集$\{x_1,\cdots,x_t\}$称为 V 的 **R-基**，生成元的个数 t 称为 V 的**秩**.

定义 3.1 一个 R-模 P 称为**射影模**，如果对于每个 R-模满同态$\varepsilon: B\twoheadrightarrow C$ 及每个 R-模同态 $\gamma: P\to C$，存在 R-模同态 $\beta: P\to B$ 使得 $\varepsilon\circ\beta=\gamma$，即下图



是交换图.

定理 3.2 对于有限生成 R-模 P，下述命题等价：

(1) P 是射影模；

(2) 对于 R-模满同态 $\varepsilon: B\twoheadrightarrow C$，有 Abel 群满同态

$$\varepsilon_*: \mathrm{Hom}_R(P,B)\twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,C),$$

其中 $\varepsilon_*(\beta)=\varepsilon\circ\beta$, $\beta\in\mathrm{Hom}_R(P,B)$；

(3) 若 $\varepsilon: B\twoheadrightarrow P$ 是 R-模满同态，则存在 R-模同态 $\beta: P\to B$ 使得 $\varepsilon\circ\beta=1_P$；

(4) 若 $P\cong B/A$，则 P 是 B 的直和项；

(5) P 是某个有限生成自由 R-模 V 的直和项.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 由射影模的定义得到.

(2)$\Longrightarrow$(3) 由 Abel 群满同态

$$\varepsilon_*: \mathrm{Hom}_R(P,B)\twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,P)$$

得到.

(3)$\Longrightarrow$(4) 设 $\varepsilon: B\twoheadrightarrow P$ 是 R-模满同态,$\mathrm{Ker}\varepsilon=A$,则有 R-模同态 $\beta: P\to B$ 使得 $\varepsilon\circ\beta=\mathbf{1}_P$. 记 $P'=\mathrm{Im}\beta\subset B$,由 $\varepsilon(P')=P$,得 $P'\cap A=\{0\}$且 $P'\cong P$. 此外,对每个 $b\in B$,存在 $x\in P'$ 使得$\varepsilon(b)=\varepsilon(x)$,从而 $a=b-x\in\mathrm{Ker}\varepsilon=A$,即 $b=a+x$. 于是 $B=P'\oplus A$,P 是 B 的直和项.

(4)$\Longrightarrow$(5) 因为 $P\cong V/A$,所以 P 是 V 的直和项.

(5)$\Longrightarrow$(1) 设 $V=P\oplus K$. 考虑 R-模满同态 $\pi: V\twoheadrightarrow P$ 及单一同态 $\iota: P\rightarrowtail V$,它们分别由$(p,k)\mapsto p$ 及 $p\mapsto(p,0)$定义,其中 $p\in P,k\in K$. 显然,$\pi\circ\iota=\mathbf{1}_P$. 由于自由模 V 是射影模,存在 R-模同态 $\beta': V\to B$ 使得 $\varepsilon\circ\beta'=\gamma\circ\pi$. 令 $\beta=\beta'\circ\iota: P\to B$,则

$$\begin{aligned}\varepsilon\circ\beta&=\varepsilon\circ(\beta'\circ\iota)=(\varepsilon\circ\beta')\circ\iota=(\gamma\circ\pi)\circ\iota\\&=\gamma\circ(\pi\circ\iota)=\gamma\circ\mathbf{1}_P=\gamma.\end{aligned}$$ ▌

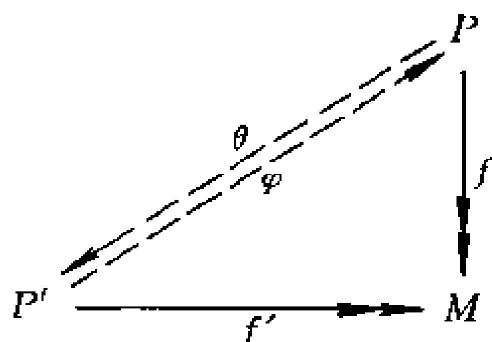
进一步可以证明,若 P_1 与 P_2 是两个有限生成 R-模,则 $P_1\oplus P_2$ 是射影模当且仅当 P_1 与 P_2 都是射影模. 我们把证明留给读者.

设 M 与 N 是两个 R-模,一个 R-模同态 $f: M\to N$ 称为**本质同态**,如果 f 是一个 R-模满同态,并且对每个 R-模同态的序列 $X\xrightarrow{g}M\xrightarrow{f}N$,当 $f\circ g$ 是满同态时,g 一定也是满同态. 这等价于不存在 M 的真子模被 R-模满同态 f 映到 N 上.

R-模 M 的**射影包** P 是指一个射影 R-模 P 及一个本质同态 $f: P\to M$.

命题 3.3 射影包如果存在的话,它们在同构的意义下是唯一的.

证明 设 P 与 P'都是 R-模 M 的射影包,则有本质同态 $f: P\to M$与 $f': P'\to M$. 由射影模的定义,因为 f'是满同态,存在 R-模同态 $\theta: P\to P'$ 使得下图



是交换图. 但是, f' 是本质同态且 $f=f'\circ\theta$ 是满同态, 从而 θ 是满同态. 由命题 3.2(3), 因为 P' 是射影模, 所以存在 R-模同态 $\varphi: P'\to P$ 使得 $\theta\circ\varphi=1_{P'}$. 注意到 f 是本质同态且 $f'=f'\circ\theta\circ\varphi=f\circ\varphi$ 是满同态, 从而 φ 也是满同态. 于是 θ 是一个同构. ▌

R-模 M 的子模满足**升链条件**, 如果对于 M 的子模的每个升链

$$M_1\subseteq M_2\subseteq\cdots,$$

存在正整数 N 使得 $M_N=M_{N+1}=\cdots$.

类似地可以定义 R-模 M 的子模满足**降链条件**, 即对于 M 的子模的每个降链

$$M_1\supseteq M_2\supseteq\cdots,$$

存在正整数 N 使得 $M_N=M_{N+1}=\cdots$.

定义 3.4 如果 R-模 M 的子模有一个降链

$$M=M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_{n+1}=\{0\},$$

使得每个商模 $M_i/M_{i+1}(1\leqslant i\leqslant n)$ 是单模, 就称 M 有一个**合成列**. $\{M_i/M_{i+1}, 1\leqslant i\leqslant n\}$ 称为这个合成列的**合成因子**.

定理 3.5 R-模有一个合成列的充分必要条件是 M 同时满足升链条件和降链条件. 又若 M 有两个合成列, 则不计次序的话, 它们的合成因子是相同的.

证明 假定 M 同时满足升链条件和降链条件, 那么 M 的真子模集合中必有极大元素 M_2, 使得 $M=M_1\supsetneqq M_2$. 否则, 我们可以归纳地找到 M 的子模的一个无限升链, 从而与 M 满足升链条件

矛盾. M_2 或者为$\{0\}$,或者含有一个极大的真子模 M_3,如此继续下去,由于 M 满足降链条件,就得到 M 的一个合成列.

反之,假定 M 有一个合成列

$$M=M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_{k+1}=\{0\},$$

对 k 作归纳法,可以证明 M 的子模的任一降链

$$N_1\supset N_2\supset\cdots\supset N_t,$$

有 $t\leqslant k+1$,于是 M 同时满足升链条件和降链条件. 当 $k=1$ 时,结论显然成立. 设 $k>1$,并分三种情况讨论.

(1) 若 $N_1=M, N_2\subset M_2$,因为 M_2 有合成列

$$M_2\supset M_3\supset\cdots\supset M_{k+1}=\{0\},$$

由归纳假设,$t-1\leqslant(k-1)+1$,即 $t\leqslant k+1$.

(2) 若 $N_1=M, N_2\not\subset M_2$,由归纳假设,$M_2$ 同时满足升链条件和降链条件,从而 $M_2\cap N_2$ 有一个合成列

$$(M_2\cap N_2)\supset L_2\supset\cdots\supset L_{s+1}=\{0\},$$

并且

$$M_2\supset(M_2\cap N_2)\supset L_2\supset\cdots\supset L_{s+1}=\{0\}$$

是 M_2 的子模的降链. 又由归纳假设,$s+2\leqslant k$. 但是,推论 2.6 告诉我们

$$(M_2+N_2)/M_2\cong N_2/(M_2\cap N_2).$$

由于 M_2 是 M 的极大子模且 $N_2\not\subset M_2$,迫使 $M_2+N_2=M$ 且商模是单模. 从而

$$N_2\supset M_2\cap N_2\supset L_2\supset\cdots\supset L_{s+1}=\{0\}$$

是 N_2 的一个合成列. 归纳假设告诉我们,$t-1\leqslant s+2\leqslant k$,即 $t\leqslant k+1$.

(3) 若 $N_1\neq M$,则

$$M\supset N_1\supset N_2\supset\cdots\supset N_t$$

是 M 的子模的一个降链,由(1)或(2)得 $t+1\leqslant k+1$,从而 $t\leqslant k+1$.

接下来证明命题的第二部分. 设 M 有两个合成列

(i) $M=M_1\supset M_2\supset\cdots\supset M_{k+1}=\{0\}$；

(ii) $M=N_1\supset N_2\supset\cdots\supset N_{l+1}=\{0\}$.

由第一部分的证明得 $k=l$. 现在对 k 作归纳法来证明. $k=1$ 时是显然的，设 $k>1$. 若 $M_2=N_2$，由归纳假设即知它们有相同的合成因子. 若 $M_2\neq N_2$，则 $M_2+N_2=M$. 由推论 2.6，有

$$M_1/M_2=M/M_2\cong N_2/(M_2\cap N_2),$$

$$N_1/N_2=M/N_2\cong M_2/(M_2\cap N_2),$$

并且 $M_2\cap N_2$ 同时是 M_2 与 N_2 的极大子模. 设

$$(M_2\cap N_2)\supset L_2\supset\cdots\supset L_{s+1}=\{0\}$$

是 $M_2\cap N_2$ 的一个合成列，那么

(iii) $M=M_1\supset M_2\supset(M_2\cap N_2)\supset L_2\supset\cdots\supset L_{s+1}=\{0\}$,

(iv) $M=N_1\supset N_2\supset(M_2\cap N_2)\supset L_2\supset\cdots\supset L_{s+1}=\{0\}$

都是 M 的合成列，并且具有相同的合成因子. 但是，归纳假设表明(i)与(iii)有相同的合成因子，(ii)与(iv)也有相同的合成因子，从而(i)与(ii)具有相同的合成因子. ▌

命题告诉我们，R-模 M 有合成列时，它的合成因子集合 $\{M_i/M_{i+1},1\leqslant i\leqslant n\}$ 不依赖于 M 的合成列的取法，所以我们可以把它们称为 M 的合成因子，并把合成因子的个数 n 称为 M 的**长度**，记为 $l(M)$.

定理 3.6 设 M 是 R-模且满足子模的升链条件，则下述断言等价：

(1) M 是单子模的直和；

(2) M 是单子模的和(不必是直和)；

(3) 对 M 的每个子模 M'，存在 M 的子模 M'' 使得 $M=M'\oplus M''$.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 是显然的.

(2) $\Longrightarrow$ (3) 对 M 的每个子模 M'，考虑 M 的子模的非空集合 $\{N\mid N\cap M'=\{0\}\}$，由习题 5 知它有极大元素 M''，只要证明 $M=M'+M''$ 即可. 设若不然，存在 $x\in M$，但 $x\notin M'+M''$. 因为 $x=$

$x_1+\cdots+x_t$，其中 $x_i\in M_i$，M_i 是 M 的单子模，$1\leqslant i\leqslant t$，所以必有某个 $x_j\notin M'+M''$，从而 $M_j\not\subset M'+M''$. 由于 M_j 是单子模，迫使 $M_j\cap(M'+M'')=\{0\}$. 于是，$(M_j+M'')\cap M'=\{0\}$ 与 M''的极大性矛盾. 这就证明了 $M=M'\oplus M''$.

(3)$\Longrightarrow$(1) 首先证明 M 的每个非零子模 N 都包含一个单子模. 设 $x\in N$，$x\neq 0$. 考虑 N 的子模的非空集合 $\{\tilde{N}\mid x\notin\tilde{N}\}$，由习题 5 知它有极大元素 N'，于是存在 M 的子模 M''使得 $M=N'\oplus M''$. 令 $N''=M''\cap N$，有 $N=N'\oplus N''$. 我们可以证明 N''是 M 的单子模. 设若不然，N''包含一个真子模 N_1，并且存在 N''的一个非零子模 N_2 使得 $N''=N_1\oplus N_2$，于是 $N=N'\oplus N_1\oplus N_2$. 由于$(N'+N_1)\cap(N'+N_2)=N'$，或者 $x\notin N'+N_1$，或者 $x\notin N'+N_2$，这与 N' 的极大性矛盾，所以 N''是 M 的单子模.

现在设 $\{M_i,i\in I\}$ 是 M 的全部单子模的集合，令 $\mathfrak{S}=\left\{J\subset I\,\middle|\,\sum\limits_{j\in J}M_j \text{ 是直和}\right\}$，由 Zorn 引理，非空集合 $\mathfrak{S}$ 有极大元素 I_0. 我们可以证明 $M=\bigoplus\limits_{i\in I_0}M_i$. 设若不然，$\bigoplus\limits_{i\in I_0}M_i$ 是 M 的真子模，则存在 M 的非零子模 M''使得 $M=\left(\bigoplus\limits_{i\in I_0}M_i\right)\oplus M''$. 但是 M''包含一个单子模 M_j $(j\notin I_0)$，使 $\sum\limits_{i\in I_0}M_i+M_j$ 仍是直和，这与 I_0 的极大性矛盾，所以 $M=\bigoplus\limits_{i\in I_0}M_i$ 是单子模的直和. ∎

我们把满足定理等价条件的 R-模称为**半单模**(或**完全可约模**).

定理 3.7 设 R 是一个环，则下述命题等价：

(1) 每个 R-模是半单模；

(2) 每个有限生成 R-模是半单模；

(3) R 作为 R-模是半单的，并且 R 是有限个极小左理想的直和.

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2) 是显然的.

(2)$\Longrightarrow$(3) 由于 $R=R1$ 是有限生成 R-模(由 R 的恒等元 1 生成),R 作为 R-模是半单模,即 R 是一族极小左理想的直和,$R=\bigoplus_{i\in I_0} L_i$. 设

$$1=e_{i_1}+\cdots+e_{i_t},$$

其中 $e_{i_j}\in L_{i_j}$. 对每个 $r\in R$,有

$$r=r1=re_{i_1}+\cdots+re_{i_t},$$

从而$R=L_{i_1}\oplus\cdots\oplus L_{i_t}$.

(3)$\Longrightarrow$(1) 设 M 是任意的 R-模,则

$$M=RM=\sum_{x\in M}\sum_{i\in I}L_i x.$$

对每个 L_i 和 $x\in M$,考虑 R-模满同态 $L_i \twoheadrightarrow L_i x$. 由定理 2.5,$L_i x$ 或者是单模或者等于零,从而 M 是半单模. ▌

我们把满足定理 3.7 等价条件的环称为**半单环**.

引理 3.8(Schur) 设 M 是单 R-模,则 $\mathrm{End}_R(M)$是除环.

更具体些,当 R 是代数闭域 F 上有限维代数时,设 M 与 N 是两个单 R-模,$\varphi\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$,则

(1) 或者 φ 是同构,或者 $\varphi=0$;

(2) $M=N$ 时,$\mathrm{Hom}_R(M,M)\cong F$.

证明 设 $\varphi\in \mathrm{Hom}_R(M,N)$且 $\varphi\neq 0$. 由于 $\mathrm{Ker}\varphi$是 M 的子模,$\mathrm{Im}\varphi$是 N 的子模,但是 M 与 N 都是单 R-模,迫使 $\mathrm{Ker}\varphi=0$ 及 $\mathrm{Im}\varphi=N$. 于是 φ 是同构. 特别,当 $M=N$ 时,$\mathrm{End}_R(M)$成为一个除环. 进一步假定 R 是代数闭域 F 上有限维代数. 当 M 与 N 不同构时,有 $\mathrm{Hom}_R(M,N)=0$,而 $\mathrm{Hom}_R(M,M)$是一个除环. 这时,$1,\varphi,\varphi^2,\cdots$不能在 F 上线性无关,存在一个非零的首项系数为 1 的多项式 $f(T)\in F[T]$使得 $f(\varphi)=0$. 但是 F 是代数闭域,存在 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in F$ 使得 $f(T)=(T-\lambda_1)\cdots(T-\lambda_m)$,从而

$$f(\varphi)=(\varphi-\lambda_1\cdot \mathbf{1}_M)\cdots(\varphi-\lambda_m\cdot \mathbf{1}_M)=0.$$

但是,$\mathrm{Hom}_R(M,M)$是除环,迫使 $\varphi=\lambda_k\cdot \mathbf{1}_M$. 于是 $\mathrm{Hom}_R(M,M)\cong F$. ▌

从现在起，我们进一步假定 R 是交换环.

定义 3.9 设 $x\in R$，如果存在 n 个整数 $a_1,\cdots,a_n\in Z$ 使得

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0,$$

就称 x **在 Z 上整**. 特别，当一个复数在 Z 上整时，称它为**代数整数**.

显然每个单位根是代数整数；一个有理数在 Z 上整时，它一定是整数.

定理 3.10 设 $x\in R$，则下述命题等价：

(1) x 在 $\mathbf{Z}$ 上整；

(2) R 的子环 $\mathbf{Z}[x]$ 是有限生成 $\mathbf{Z}$-模；

(3) 存在 R 的有限生成 $\mathbf{Z}$-子模使得它包含 $\mathbf{Z}[x]$.

证明 (1)$\Longrightarrow$(2) 设 x 满足

$$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0,\quad a_1,\cdots,a_n\in\mathbf{Z}.$$

考虑 R 的由 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 生成的 $\mathbf{Z}$-子模，因为

$$x^{n+r}=-(a_1x^{n+r-1}+\cdots+a_nx^r),\quad r\geqslant 0,r\in\mathbf{Z},$$

所以 $\mathbf{Z}[x]$ 由 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 生成.

(2)$\Longrightarrow$(3) 是显然的.

(3)$\Longrightarrow$(1) 设 R_n 是 R 的一个 $\mathbf{Z}$-子模，它由 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 生成，于是 $R_1\subset R_2\subset\cdots\subset R_n\subset\cdots$，并且 $\bigcup_{n\geqslant 1}R_n=\mathbf{Z}[x]$. 又设 M 是 R 的有限生成 $\mathbf{Z}$-子模使得 $\mathbf{Z}[x]\subset M$，于是 $\bigcup_{n\geqslant 1}R_n\subset M$. 因为有限生成 $\mathbf{Z}$-模的子模是有限生成的，所以 $\mathbf{Z}[x]$ 是有限生成的，即存在充分大的 n 使得 $\mathbf{Z}[x]=R_n$. 这时，x^n 是 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 的整系数线性组合，即 x 在 $\mathbf{Z}$ 上整. ▌

推论 3.11 R 中在 Z 上整的元素全体成为 R 的子环.

证明 设 $x,y\in R$，它们在 $\mathbf{Z}$ 上整，则 $\mathbf{Z}[x]$ 与 $\mathbf{Z}[y]$ 是有限生成 $\mathbf{Z}$-模. 考虑由 $(f(x),g(y))\mapsto f(x)g(y)$ 定义的映射 $\mathbf{Z}[x]\times\mathbf{Z}[y]\to\mathbf{Z}[x,y]$，这是一个 $\mathbf{Z}$-模的平衡积，因此有 $\mathbf{Z}$-模满同态 $\mathbf{Z}[x]\otimes\mathbf{Z}[y]\twoheadrightarrow\mathbf{Z}[x,y]$，使得 $\mathbf{Z}[x,y]$ 也是有限生成 $\mathbf{Z}$-模，于是

$Z[x,y]$的每个元素都在 Z 上整，从而 $x+y\in R, xy\in R$. ∎

例 1 设 ε 是一个 n 次本原单位根，记 $N=\varphi(n)=$与 n 互素又比 n 小的正整数的个数，即 φ 是 Euler 函数，则 C 中由 n 次单位根生成的子环 $Q[\varepsilon]$中在 Z 上整的元素全体成为 $Q[\varepsilon]$的一个子环 $Z[\varepsilon]$，并且 $Z[\varepsilon]=Z\oplus Z\varepsilon\oplus\cdots\oplus Z\varepsilon^{N-1}$.

最后，我们介绍有关赋值的一些结果. 设 K 是一个域，R^+是非负整实数的集合.

定义 3.12 域 K 上一个**赋值**是映射 $\varphi: K\to R^+$使得

(1) $\varphi(a)=0 \Longleftrightarrow a=0,\quad a\in K$;

(2) $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b),\quad a,b\in K$;

(3) $\varphi(a+b)\leqslant\max\{\varphi(a),\varphi(b)\},\quad a,b\in K$.

特别，当乘法群 K^* 的同态像$\{\varphi(a)\,|\,a\in K^*\}$与无限循环群 Z 同构时，φ 称为 K 的一个**离散赋值**.

显然，集合 $A=\{a\in K\,|\,\varphi(a)\leqslant 1\}$是 K 的一个子环，称为 φ 的**赋值环**. 当 φ 是 K 的一个离散赋值时，A 是一个**离散赋值环**，从而是一个主理想整环，它只有唯一极大理想 $\mathfrak{m}=\{a\in K\,|\,\varphi(a)<1|\}$，并且 $\mathfrak{m}=\pi A$ 是一个主理想，其中 $\pi\in A$ 使 $\varphi(\pi)$生成无限循环群 $\{\varphi(a)\,|\,a\in K^*\}$. 相应的剩余类域是 $k=A/\mathfrak{m}$，并且 A 是**整闭**的（例如参考[AM]，p. 65；p. 94 或[CR2]，p. 81）.

例 2 考虑有理数域 Q 上的 **p-adic 赋值**，其中 p 是任意固定的素数. 每个有理数 $x\neq 0$ 可以写成

$$x=\frac{s}{t}p^m,$$

其中 s 和 t 是与 p 互素的整数. 若令

$$\varphi_p(x)=p^{-m},$$

并规定 $\varphi_p(0)=+\infty$，则 φ_p 是 Q 的一个 p-adic 赋值. 它是离散赋值，相应的赋值环就是 **p-adic 整数**所成的环 Z_p，Q 关于这个 p-adic 赋值的完备化就是 **p-adic 数域** Q_p.

进一步设 ε 是一个 n 次本原单位根，考虑数域 $Q(\varepsilon)$的 p-adic

完备化 K，它是一个特征为零的域，相应的 p-adic 赋值的赋值环 A 有唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$，得到剩余类域 $k=A/\mathfrak{m}$ 是一个特征为 p 的域，并且 A 关于 p-adic 拓扑是完备的. 这个从特征为零的域 K 过渡到特征为 p 的域 k 的过程称为**模 $\mathfrak{m}$ 约化**，并把(K,A,k)称为一个 **p-模系统**. 为了以后叙述方便起见，我们不加证明地介绍一些事实，有兴趣的读者可以参考[CR2]p. 40，p. 81，p. 128，p. 402，p. 418 等. 首先，$K[G]$是一个半单代数，$k[G]$同时满足关于左理想的升链条件与降链条件. 由于离散赋值环 A 满足关于理想的升链条件，所以 $A[G]$满足关于左理想的升链条件，从而每个有限生成 $A[G]$-模(或 $k[G]$-模)V 可以唯一地分解成为不可分解子模的直和

$$V=\bigoplus_{i=1}^{r}V_i,$$

每个 V_i 是不可分解的，即 V_i 不能写成两个非平凡真子模的直和.

设 m 是 G 的元素的阶的最小公倍数，$m=p^a m'$ 使$(m',p)=1$，当 K 包含 m 次本原单位根 ω 时，由于 $\omega^m-1=0$，ω 是一个代数整数，从而 $\omega\in A$. 这时，在多项式环 $A[X]$中有

$$X^m-1=\prod_{i=0}^{m-1}(X-\omega^i).$$

如果记 $\overline{a}\in k$ 是 $a\in A$ 在典范映射 $A\to A/\mathfrak{m}=k$ 下的像，那么在 $k[X]$中有

$$(X^{m'}-\overline{1})^{p^a}=X^m-\overline{1}=\prod_{i=0}^{m-1}(X-\overline{\omega}^i).$$

因此$\{\overline{\omega}^i\mid 0\leqslant i\leqslant m-1\}$给出全部 m' 次单位根，每个出现 p^a 次，于是 k 包含了全部 m' 次单位根.

习　题

1. 设 D 是主理想整环，M 是有限生成 D-模，$\mathrm{Tor}(M)=\{y\in M\mid ay=0$ 对某个 $a\in D\}$是 M 的**挠子模**. 证明 M 是挠子模与自由子模的直和.

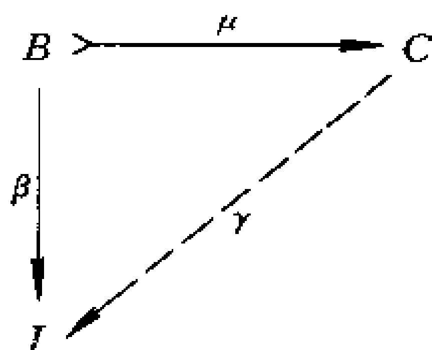
2. 在主理想整环 D 上定义有限生成模 M 的秩是自由模 $M/\mathrm{Tor}(M)$的秩. 证明

(1) 若 $M\cong D^{(n)}/K$,则 $\mathrm{rank}(M)=n-\mathrm{rank}(K)$;

(2) 若 N 是 M 的子模,则 N 与 M/N 都是有限生成的,且

$$\mathrm{rank}(M)=\mathrm{rank}(N)+\mathrm{rank}(M/N).$$

3. 设 R 是一个有恒等元的环,R-模 I 是一个**内射模**,如果对 R-模单一同态 $\mu: B\rightarrowtail C$ 及同态 $\beta: B\to I$,存在同态 $\gamma: C\to I$ 使下图



是交换图. 证明下述命题等价:

(1) I 是内射模;

(2) 对于 R-模单一同态 $\mu: B\rightarrowtail C$,有 Abel 群满同态 μ^*: $\mathrm{Hom}_R(C,I)\to\mathrm{Hom}_R(B,I)$,这里 $\mu^*(\gamma)=\gamma\circ\mu$, $\gamma\in\mathrm{Hom}_R(C,I)$;

(3) 若 $\mu: I\rightarrowtail B$ 是 R-模单一同态,则存在 R-模同态 $\beta: B\to I$ 使得 $\beta\circ\mu=1_I$;

(4) 若 I 是 R-模 B 的子模,则 I 是 B 的直和项.

4. 设 M 与 N 是 R-模,$f: M\to N$ 是**本质单一同态**,如果 f 是一个单一同态,并且对每个 R-模同态的序列 $M\xrightarrow{f}N\xrightarrow{g}Y$ 使得 $g\circ f$ 是单一同态时,g 一定也是单一同态. 从而定义 M 的**内射包** I 是一个内射 R-模及一个本质单一同态 $f: M\to I$. 试证明内射包如果存在,在同构的意义下是唯一的.

5. 证明下述断言是等价的:

(1) R-模 M 满足升链(或降链)条件;

(2) R-模 M 的子模的非空集合有极大(或极小)元素.

6. 设 R 是有恒等元的环. 一个 R-模 M 的根 $\mathrm{rad}(M)$ 定义为 M 的所有极大子模的交. 类似的,定义 R 的根 $\mathrm{rad}(R)$ 为 R 的所有极大左理想的交. 试证明

(1) 设 $f: L \to M$ 是 R-模同态,则 $f(\mathrm{rad}(L)) \subseteq \mathrm{rad}(M)$.

(2) 设 L, M 是 R-模, $L \subseteq M$,则

$$\mathrm{rad}(L) \subseteq \mathrm{rad}(M), \quad (\mathrm{rad}(M)+L)/L \cong \mathrm{rad}(M/L),$$

$$\mathrm{rad}(R)M \subseteq \mathrm{rad}(M).$$

(3) 设 M 是有限生成 R-模, L 是 M 的子模并且满足 $L + \mathrm{rad}(M) = L$,则 $L = M$.

(4) (Nakayama 引理) 设 M 是有限生成 R-模, L 是 M 的子模并且满足 $L + \mathrm{rad}(R)M = M$,则 $L = M$.

第二章　有限群的常表示

我们想使用尽可能初等的语言来介绍有限群的常表示理论，只要求读者熟悉线性代数以及第一章预备知识中所介绍的内容．本章涉及的群 G 都假定是有限群．

§1　线性表示的定义与例子

设 V 是复数域 $\boldsymbol{C}$ 上 n 维向量空间，$\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 V 的一个基．又设 $GL(V)$ 是 V 的可逆线性变换全体所成的群，即对于任意的 $a\in GL(V)$，定义 $\boldsymbol{C}$ 上线性映射 $a: V\to V$ 为

$$a(v_j)=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}v_i,\quad a_{ij}\in \boldsymbol{C},$$

使得 (a_{ij}) 是 n 阶复可逆矩阵．

定义 1.1　设 G 是有限乘法群，G 在 V 内的一个**线性表示**是一个从群 G 到群 $GL(V)$ 内的同态 $\rho: G\to GL(V)$．这时，V 称为 G 的一个**表示空间**，V 的维数 n 称为表示的**次数**．特别，当 $\mathrm{Ker}\rho=0$ 时，ρ 称为 G 的**忠实表示**．

对于 $x\in G$，记 $\rho(x)\in GL(V)$ 是 V 上可逆线性变换．于是

$$\rho(xy)=\rho(x)\rho(y),\quad x,y\in G,$$

$$\rho(x^{-1})=(\rho(x))^{-1},\quad x\in G,$$

$$\rho(1)=\mathbf{1}_V\ \text{是}\ V\ \text{上恒等线性变换}.$$

为简单计，用 ρ_x 代替 $\rho(x)$，并设 R_x 是 ρ_x 在基 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 下的矩阵，$R_x=(r_{ij}(x))$．于是

$$R_xR_y=R_{xy},\quad x,y\in G,$$

$$\det(R_x)\neq 0,\quad x\in G,$$

$$R_1=I \text{ 是 } n \text{ 阶单位矩阵},$$

$$R_{x^{-1}}=(R_x)^{-1}, \quad x\in G,$$

$$r_{ik}(xy)=\sum_{j=1}^{n} r_{ij}(x)r_{jk}(y), \quad x,y\in G.$$

反之,已知可逆矩阵 $R_x=(r_{ij}(x))$,$x\in G$,满足上述性质,则存在一个 G 在 V 内的线性表示 ρ,使 ρ_x 与 R_x 对应. 因此,可以用矩阵形式来给出一个线性表示.

设 $\rho: G\to GL(V)$ 与 $\rho': G\to GL(V')$ 是群 G 在向量空间 V 与 V' 内的两个线性表示,如果存在向量空间的同构 $\tau: V\to V'$ 使得

$$\tau\circ\rho(x)=\rho'(x)\circ\tau, \quad x\in G,$$

那么,这两个线性表示是同构的. 用矩阵语言来说,即存在可逆复矩阵 T 使得

$$TR_x=R'_xT, \quad x\in G,$$

即 $R'_x=TR_xT^{-1}$.

设 G 在 $\boldsymbol{C}$ 上的群代数为 $\boldsymbol{C}[G]$,那么 G 在 V 内的线性表示

$$\rho: G\to GL(V)$$

可以线性地扩充为一个 C-代数同态

$$\rho: \boldsymbol{C}[G]\to \mathrm{End}_C(V),$$

使得

$$\rho\Big(\Big(\sum_{x\in G}a(x)x\Big)\Big(\sum_{y\in G}b(y)y\Big)\Big)=\Big(\sum_{x\in G}a(x)\rho_x\Big)\Big(\sum_{y\in G}b(y)\rho_y\Big)$$
$$=\sum_{z\in G}\Big(\sum_{xy=z}a(x)b(y)\Big)\rho_z.$$

于是,V 被赋予左 $\boldsymbol{C}[G]$-模的结构:

$$\Big(\sum_{x\in G}a(x)x\Big)\cdot v=\sum_{x\in G}a(x)\rho_x(v), \quad v\in V.$$

反之,这样定义的 $\boldsymbol{C}[G]$-模结构也给出了 G 在 V 内的一个线性表示. 为方便计,我们将不加区别地使用术语"线性表示"或"模".

例 1 每个群 G 有一个平凡的 1 次表示 $\rho: G\to \boldsymbol{C}^*$,对每个 x

$\in G$ 有 $\rho(x)=1$，通常称为**单位表示**.

例 2 每个群 G 有一个**正则表示**. 设 G 的阶为 g，V 是 $\boldsymbol{C}$ 上 g 维向量空间，它有一个以 G 中元素为指标集的基 $\{v_x \mid x\in G\}$. 定义 G 的正则表示 $\mathrm{Reg}: G \to GL(V)$ 为

$$\mathrm{Reg}_x(v_y)=v_{xy}, \quad x,y\in G.$$

更一般地，设 S 是一个有限集，群 G 作用在 S 上. 又设 V 是 $\boldsymbol{C}$ 上向量空间，它有一个以 S 中元素为指标集的基 $\{v_s \mid s\in S\}$. 定义 G 关于 S 的**置换表示** $\rho: G \to GL(V)$ 为

$$\rho_x(v_s)=v_{xs}, \quad x\in G, s\in S.$$

设 $\rho: G \to GL(V)$ 是一个线性表示，$W\subset V$ 是在 G 作用下稳定的子空间，即对于 $w\in W, x\in G$，有 $\rho_x(w)\in W$. 限制 ρ_x 到 W 上，得到 W 上可逆线性变换 $\rho_x|_W$. 于是，

$$\rho|_W: G \to GL(W)$$

是 G 在 W 内的线性表示，称为 ρ 的一个**子表示**，或称 W 是 V 的一个 $\boldsymbol{C}[G]$-**子模**. 例如，当 ρ 是 G 的正则表示 Reg 时，令 W 是 V 的由向量 $v=\sum\limits_{x\in G}v_x$ 生成的 1 维子空间，则 W 是 V 的一个 $\boldsymbol{C}[G]$-子模，它就是 G 的单位表示.

定义 1.2 设 $\rho: G \to GL(V)$ 是 G 的一个线性表示，如果 $V\neq 0$ 且 V 不含 G 作用下稳定的非平凡子空间，那么 ρ 称为 G 的一个**不可约线性表示**，或称 V 是一个**单 $\boldsymbol{C}[G]$-模**. 否则，则 ρ 是可约的线性表示，或称 V 是可约的 $\boldsymbol{C}[G]$-**模**.

每个 1 次表示显然都是不可约表示.

定理 1.3（Maschke） 设 V 是一个 $\boldsymbol{C}[G]$-模，$W\subset V$ 是一个 $\boldsymbol{C}[G]$-子模，则存在 V 的 $\boldsymbol{C}[G]$-子模 W' 使得 $V=W\oplus W'$.

由第一章的定理 3.6，每个 $\boldsymbol{C}[G]$-模是半单模，从而由第一章定理3.7，群代数 $\boldsymbol{C}[G]$ 是**半单代数**.

证明 作为 $\boldsymbol{C}$ 上向量空间，存在 V 的子空间 W_0 使 $V=W\oplus W_0$，于是存在 V 到 W 上射影 $p\in \mathrm{End}_{\boldsymbol{C}}(V)$，满足

$$p|_W = \mathbf{1}_W, \quad p(V) \subseteq W.$$

令

$$p' = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho_x \circ p \circ \rho_x^{-1},$$

因为 $p(V) \subseteq W$, $\rho_x(W) \subseteq W$, 所以 $p'(V) \subseteq W$. 对任意的 $w \in W$, 因为 $\rho_x^{-1}(w) \in W$, $p \circ \rho_x^{-1}(w) = \rho_x^{-1}(w)$ 及 $\rho_x \circ p \circ \rho_x^{-1}(w) = w$, 所以 $p'(w) = w$, 即 $p'|_W = \mathbf{1}_W$, 从而 p' 是 V 到 W 上射影. 对任意的 $y \in G$, 由

$$\begin{aligned} \rho_y \circ p' \circ \rho_y^{-1} &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho_y \circ \rho_x \circ p \circ \rho_x^{-1} \circ \rho_y^{-1} \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho_{yx} \circ p \circ \rho_{yx}^{-1} = p', \end{aligned}$$

知 $p' \in \mathrm{End}_{C[G]}(V)$. 令

$$W' = (\mathbf{1}_V - p')(V) \subseteq V,$$

则 $p'|_{W'} = 0$. 易证 $V = W \oplus W'$ 是子空间的直和, 且对于 $w \in V$, $p'(w) = 0$ 当且仅当 $w \in W'$. 从而对任意的 $w \in W'$ 及 $y \in G$, 有 $p' \circ \rho_y(w) = \rho_y \circ p'(w) = 0$, 即 $\rho_y(w) \in W'$. 于是, W' 是 V 的 $\boldsymbol{C}[G]$-子模使得 $V = W \oplus W'$. ▌

由定理的证明可以看出, 对任意的域 F, 只要 $\mathrm{char}F$ 不是 $|G|$ 的因子, $\frac{1}{|G|}$ 总有意义, 群代数 $F[G]$ 就是半单代数. 用矩阵的语言来说, 设 R_x 与 R'_x 分别是 $\rho|_W(x)$ 与 $\rho|_{W'}(x)$ 在 W 的基 $\{w_1, \cdots, w_r\}$ 与 W' 的基 $\{w'_1, \cdots, w'_s\}$ 下的矩阵, 则 $\rho(x)$ 在 V 的基 $\{w_1, \cdots, w_r, w'_1, \cdots, w'_s\}$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} R_x & 0 \\ 0 & R'_x \end{pmatrix}.$$

类似地, 可以给出任意有限多个 $\boldsymbol{C}[G]$-模的直和的矩阵形式, 它也是个分块对角矩阵.

定理 1.4 每个 $\boldsymbol{C}[G]$-模 V 是单 $\boldsymbol{C}[G]$-模的直和.

证明 用定理 1.3 与第一章的定理 3.6. ▌

设 $V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k$ 是把 V 分解成单 $C[G]$-模直和的一种分解，又设 $\{v_{i1},\cdots,v_{ir_i}\}$ 是 W_i 的一个基，对任意的 $x\in G$，$R_x^{(i)}$ 是 $\rho|_{W_i}$ 在这个基下的矩阵，$1\leqslant i\leqslant k$。那么 ρ 在 V 的基 $\{v_{11},\cdots,v_{1r_1},\cdots,v_{k1},\cdots,v_{kr_k}\}$ 下的矩阵是分块对角矩阵

$$\begin{pmatrix} R_x^{(1)} & & & \\ & R_x^{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_x^{(k)} \end{pmatrix}.$$

一般说来，V 的这种分解并不是唯一的，但是我们可以证明，同构于某个单 $C[G]$-模 W 的 W_i 的个数是唯一确定的.

命题 1.5 设 $\{W_i\}_{i\in I}$ 是单 $C[G]$-模同构类的代表元集，V 是一个 $C[G]$-模，则 V 有典范分解

$$V=\bigoplus_{i\in I}V_i,$$

其中 $V_i=a_iW_i=\underbrace{W_i\oplus\cdots\oplus W_i}_{a_i\text{个}}$，并且这个分解与 V 分解成单 $C[G]$-模直和的方法无关，即对 V 的任意一个单 $C[G]$-模的直和分解 $V=\bigoplus_{j\in J}U_j$，当 $\tilde{V}_i=\bigoplus_{\substack{j\in J\\ U_j\cong W_i}}U_j$ 时，有 $V=\bigoplus_{i\in I}\tilde{V}_i$，$V_i=\tilde{V}_i$，$i\in I$.

证明 由定理 1.4，V 的典范分解是一定存在的. 设 W 是 V 的任意一个单 $C[G]$-子模使 $W\cong W_i$，则对 $w\in W$，由直和分解 $V=\bigoplus_{j\in J}U_j$，有

$$w=\sum_{j\in J}w_j,\quad w_j\in U_j.$$

当 $w_j\neq 0$ 时，考虑典范射影 $\pi_j: V\to U_j$，有 $\pi_j(W)\neq 0$. 由于 W 与 U_j 都是单 $C[G]$-模，限制于 W，$\pi_j|_W: W\to U_j$ 是一个同构. 因此，除了 $U_j\cong W_i$ 外，总有 $w_j=0$，于是 $w\in\tilde{V}_i$，即 $W\subseteq\tilde{V}_i$. 从而对每个 $i\in I$，有 $V_i\subseteq\tilde{V}_i$. 又设 $f\in \mathrm{Hom}_{C[G]}(\tilde{V}_i,\tilde{V}_{i'})$，$i,i'\in I$ 且 $i\neq i'$. 若 $f\neq 0$，则有 $\tilde{V}_i$ 的与 W_i 同构的单子模 P 使 $f(P)\neq 0$，并且 $f(P)$ 是 $\tilde{V}_{i'}$ 的与 W_i 同构的单子模，这显然是荒谬的. 所以

$$\mathrm{Hom}_{C[G]}(\tilde{V}_i,\tilde{V}_{i'})=0,\quad i,i'\in I,i\neq i'.$$

现在考虑嵌入同态 $\tau:\tilde{V}_i\to V=\bigoplus_{i\in I}V_i$. 对 $i'\neq i$，由于 $V_{i'}\subseteq\tilde{V}_{i'}$ 且 $\mathrm{Hom}_{C[G]}(\tilde{V}_i,\tilde{V}_{i'})=0$，一定有 $\tau(\tilde{V}_i)\subseteq V_i$，从而 $V_i=\tilde{V}_i$. ▌

与线性表示的直和运算相平行的是线性表示的张量积. 设 $\rho^{(1)}: G\to GL(V_1)$ 与 $\rho^{(2)}: G\to GL(V_2)$ 是 G 的两个线性表示，对每个 $x\in G$，通过

$$\rho_x(v_1\otimes v_2)=\rho_x^{(1)}(v_1)\otimes\rho_x^{(2)}(v_2),\quad v_1\in V_1,v_2\in V_2,$$

定义 $\rho^{(1)}$ 与 $\rho^{(2)}$ 的张量积为 G 的线性表示 $\rho: G\to GL(V_1\otimes V_2)$. 根据第一章 §2 所介绍的张量积的定义和性质，ρ 是由 $\rho^{(1)}$ 与 $\rho^{(2)}$ 唯一确定的，记为

$$\rho_x=\rho_x^{(1)}\otimes\rho_x^{(2)},\quad x\in G.$$

由第一章 §2 例 4，如果 $R_x^{(1)}$ 与 $R_x^{(2)}$ 分别是 $\rho_x^{(1)}$ 与 $\rho_x^{(2)}$ 在 V_1 的基 $\{v_1,\cdots,v_r\}$ 与 V_2 的基 $\{w_1,\cdots,w_t\}$ 下的矩阵，那么 ρ_x 在 $V_1\otimes V_2$ 的基 $\{v_i\otimes w_j\mid 1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant t\}$ 下的矩阵是 $R_x^{(1)}\otimes R_x^{(2)}=R_x$. 必须注意的是，两个不可约线性表示的张量积一般不再是不可约的，如何把它分解为不可约表示的直和是群表示论中的一个重要课题.

例 3 设 $\rho: G\to GL(V)$ 是 G 的一个不可约线性表示，$\rho^{\otimes k}=\underbrace{\rho\otimes\cdots\otimes\rho}_{k次}: G\to GL(\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{k次})$ 就包含两个明显的子表示：**外幂** $\Lambda^k(V)$ 与**对称幂** $S^k(V)$. 设 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 是 C 上向量空间 V 的一个基，S_k 是 k 次对称群. 对 $\sigma\in S_k$，记 $\sigma(v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_k})=v_{\sigma(i_1)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(i_k)}$，则 $S^k(V)$ 有一个基，它由所有形如

$$\sum_{\sigma\in S_k}\sigma(v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_k}),\quad 1\leqslant i_1\leqslant\cdots\leqslant i_k\leqslant n$$

的向量组成，因此 $\dim_C S^k(V)=\binom{n+k-1}{k}$. 进一步设

$$\mathrm{sgn}(\sigma)=\begin{cases}1, & \sigma\text{ 是偶置换},\\ -1, & \sigma\text{ 是奇置换},\end{cases}$$

则 $\Lambda^k(V)$ 有一个基，它由所有形如

$$\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma(v_{i_1}\otimes\cdots\otimes v_{i_k}),\quad 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$$

的向量组成，因此 $\dim_C\Lambda^k(V)=\binom{n}{k}$.

特别，当 $k=2$ 时，$V\otimes V=S^2(V)\oplus\Lambda^2(V)$.

设 $\rho: G\to GL(V)$ 是 G 在 V 内的线性表示，我们可以定义它的**对偶表示**(或**反轭表示**) $\rho^*: G\to GL(V^*)$，其中 $V^*=\operatorname{Hom}_C(V,C)$ 是 V 的对偶空间. 对任意 $x\in G$, $f\in V^*$ 及 $v\in V$，令

$$(\rho_x^*(f))(v)=f(\rho_x^{-1}(v)).$$

容易验证，它定义了 G 在 V^* 内的线性表示 ρ^*. 如果取 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 为 V 的一个基，$\{f_1,\cdots,f_n\}$ 为 V^* 的对偶基，即

$$f_i(v_j)=\delta_{ij},\quad i,j=1,\cdots,n.$$

又设 ρ_x 关于 V 的这个基的矩阵为 $R_x=(r_{ij}(x))$，ρ_x^* 关于 V^* 的对偶基的矩阵为 $R_x^*=(r_{ij}^*(x))$. 由于

$$\rho_x^*(f_j)=\sum_{i=1}^n r_{ij}^*(x)f_i,\quad \rho_x(v_j)=\sum_{i=1}^n r_{ij}(x)v_i,$$

及

$$\begin{aligned}(\rho_x^*(f_j))(v_k)&=f_j(\rho_x^{-1}(v_k))\\&=f_j\Big(\sum_{i=1}^n r'_{ik}(x)v_i\Big)=r'_{jk}(x),\end{aligned}$$

$$\Big(\sum_{i=1}^n r_{ij}^*(x)f_i\Big)(v_k)=r_{kj}^*(x),$$

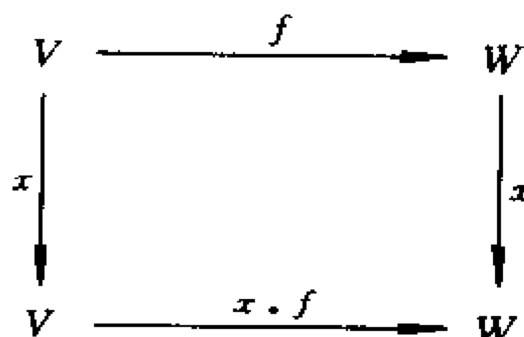
其中 $R_x^{-1}=(r'_{ij}(x))$ 是 R_x 的逆矩阵，于是，R_x^* 是 R_x 的逆矩阵的转置，即

$$R_x^*=(R_x^{-1})^{\mathrm{T}}.$$

进一步设 V 与 W 是两个 $C[G]$-模，通过典范同构 $\operatorname{Hom}_C(V,W)\cong V^*\otimes_C W$，$\operatorname{Hom}_C(V,W)$ 成为一个 $C[G]$-模(见第一章 §2 习题 8). 对任意的 $f\in\operatorname{Hom}_C(V,W)$，$v\in V$ 及 $x\in G$，有

$$(x\cdot f)(v)=x\cdot(f(x^{-1}\cdot v)),$$

即下图



是交换图. 特别,当 $W=C$ 是平凡模时,对任意的 $x\in G$ 及 $w\in W$,有 $x\cdot w=w$. 于是,$V^*\cong \mathrm{Hom}_C(V,C)$上的 $C[G]$-模结构由

$$(x\cdot f)(v)=f(x^{-1}\cdot v),\quad f\in V^*,v\in V,x\in G$$

给出,恰好与前面定义的一致.

考虑从 V 到 W 的 $C[G]$-模同态所成的子空间 $\mathrm{Hom}_{C[G]}(V,W)$. 对任意的 $f\in \mathrm{Hom}_{C[G]}(V,W)$, $x\in G$, $v\in V$,因为

$$(x\cdot f)(v)=x\cdot (f(x^{-1}\cdot v))=f(v),$$

所以 $f\in \mathrm{Hom}_C(V,W)^G$,即有$\mathrm{Hom}_{C[G]}(V,W)\subseteq \mathrm{Hom}_C(V,W)^G$. 反包含关系是显然的,于是有

$$\mathrm{Hom}_C(V,W)^G=\mathrm{Hom}_{C[G]}(V,W).$$

最后,我们证明有限群 G 的每个线性表示都同构于一个**酉表示**,即它所对应的矩阵形式 R_x 都是**酉矩阵**.

命题 1.6 设 $\rho: G\to GL(V)$是一个线性表示,则可以在 V 内适当选取基使得 ρ_x 在这个基下的矩阵 R_x 是酉矩阵,$x\in G$.

证明 作为复数域 C 上 n 维向量空间 V,可以这样定义一个正定的 Hermite 内积(,):

选取$\{v_1,\cdots,v_n\}$是 V 的一个基,定义 $\Psi(v_i,v_j)=\delta_{ij}$,使得 $\Psi($, $)$是 V 上一个正定的 Hermite 内积. 然后,对每个 $x\in G$,通过

$$\Psi_x(u,v)=\Psi(\rho_x(u),\rho_x(v)),\quad u,v\in V$$

定义了 V 上一个新的正定的 Hermite 内积 $\Psi_x($, $)$. 现在,对任意

的 $u,v\in V$，令

$$(u,v)=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\Psi_x(u,v),$$

它就是所要定义的正定的 Hermite 内积. 对任意的 $y\in G$，因为

$$\begin{aligned}(\rho_y(u),\rho_y(v))&=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\Psi_x(\rho_y(u),\rho_y(v))\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\Psi(\rho_x\rho_y(u),\rho_x\rho_y(v))\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\Psi(\rho_{xy}(u),\rho_{xy}(v))\\&=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\Psi_{xy}(u,v)=(u,v),\end{aligned}$$

所以这个 Hermite 内积是 G-不变的. 现在，我们可以在 V 内选取一个基 $\{u_1,\cdots,u_n\}$ 使得 $(u_i,u_j)=\delta_{ij}$，即这是 V 的一个关于所定义的 G-不变的正定的 Hermite 内积 $(\ ,\ )$ 的正规正交基. 于是，对每个 $x\in G$，ρ_x 在这个基下的矩阵 R_x 是酉矩阵，即有

$$\overline{R}_x^{-1}=R_x^{\mathrm{T}}\quad ▌$$

习　　题

1. 证明映射

$$a\mapsto\begin{pmatrix}i&0\\0&-i\end{pmatrix},\quad b\mapsto\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad i=\sqrt{-1}$$

及映射

$$a\mapsto\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad b\mapsto\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

定义了二面体群 D_4 的线性表示. 它们是否等价？

2. 证明两个 1 次线性表示等价的充分必要条件是它们作为映射是相等的.

3. 设 F_p 是特征 $p>0$ 的域，G 是 p 阶循环群 $\langle x\rangle$. 证明由

$$x\mapsto\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

定义的 G 的线性表示是可约的但不是完全可约的，即对应的 $F_p[G]$-模是可约的但不是完全可约的.

4. 设 $\rho: G \to GL(V)$是有限群 G 的线性表示，对每个 $x \in G$，ρ_x 关于 V 上一个正定的 Hermite 型 $f(\ ,\ )$是复向量空间 V 上的酉变换. 证明：对每个 $C[G]$-子模 $W \subset V$，有 V 的 $C[G]$-子模的直和分解 $V = W \oplus W^{\perp}$，其中 $W^{\perp} = \{v \in V \mid f(W, v) = 0\}$，从而 V 是完全可约的.

5. 设 V 是 n 维复向量空间，证明

$$V \otimes V = S^2(V) \oplus \Lambda^2(V).$$

§2 特征标理论

设 V 是一个 C-向量空间，它有一个基$\{v_1, \cdots, v_n\}$. 又设 a 是 V 上线性变换，它关于这个基的矩阵为(a_{ij}). 我们定义线性变换 a 的迹为 a 的所有特征值的和，从而

$$\mathrm{tr}(a) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

易见，这样定义的迹不依赖于 V 的基的取法.

定义 2.1 设 $\rho: G \to GL(V)$是 G 在 V 内的一个线性表示，对每个 $x \in G$，通过

$$\chi_\rho(x) = \mathrm{tr}(\rho_x)$$

定义了 G 上复值函数 $\chi_\rho: G \to C$. 我们把 χ_ρ 称为 G 的线性表示 ρ 的**特征标**. 有时为了强调表示空间 V，也把 χ_ρ 写成 χ_V. 在不至于引起误会的情况下，也简写为 χ.

命题 2.2 设 χ 是有限群 G 的 n 次线性表示 ρ 的特征标. 则

(1) $\chi(1) = n$;

(2) $\chi(x^{-1}) = \overline{\chi(x)}, \quad x \in G$;

(3) $\chi(yxy^{-1}) = \chi(x), \quad x, y \in G$.

证明 由于 $\rho_1 = 1_V$ 且 $\dim_C V = n$，因此(1)成立. 又因为 ρ_x 是

有限阶线性变换，它的 n 个特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 都是单位根，从而 λ_i 的共轭复数 $\overline{\lambda_i}=\lambda_i^{-1}$. 于是

$$\overline{\chi(x)}=\overline{\mathrm{tr}(\rho_x)}=\sum_{i=1}^{n}\overline{\lambda_i}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{-1}$$
$$=\mathrm{tr}(\rho_x^{-1})=\chi(x^{-1}),$$

得到(2). 因为对于 V 上线性变换 a 与 b，有 $\mathrm{tr}(ab)=\mathrm{tr}(ba)$. 令 $a=\rho_y\rho_x, b=\rho_y^{-1}$，即得(3)成立. ∎

G 上函数满足条件(3)时，称为**类函数**，它在 G 的共轭类上取常值. 我们将证明 G 上每个类函数是特征标的线性组合.

命题 2.3 设 $\rho: G\to GL(V)$ 与 $\tau: G\to GL(W)$ 是 G 的两个线性表示，χ_V 与 χ_W 分别是它们的特征标，则

(1) $\chi_{V\oplus W}=\chi_V+\chi_W$;

(2) $\chi_{V\otimes W}=\chi_V\chi_W$;

(3) $\chi_{V^*}=\overline{\chi_V}$;

(4) $\chi_{S^2(V)}(x)=\dfrac{1}{2}(\chi_V(x)^2+\chi_V(x^2)),\quad x\in G,$

$\chi_{A^2(V)}(x)=\dfrac{1}{2}(\chi_V(x)^2-\chi_V(x^2)),\quad x\in G.$

证明 如所周知，对每个 $x\in G$，若 ρ_x 与 τ_x 关于 V 与 W 的基的矩阵分别是 R_x 与 T_x，则

$$\begin{pmatrix} R_x & 0 \\ 0 & T_x \end{pmatrix},\quad R_x\otimes T_x \text{ 与} (R_x^{-1})^{\mathrm{T}}$$

分别给出 G 的线性表示 $V\oplus W, V\otimes W$ 与 V^* 在相应的基下的矩阵. 于是(1)，(2)与(3)成立.

为了证明(4)，对任意固定的 $x\in G$，由于 x 是有限阶元素，满足 $\rho_x^{|G|}-\mathbf{1}_V=0$，我们可以选取 V 的一个基 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 使得每个 v_i 都是 ρ_x 的特征向量，即 $\rho_x(v_i)=\lambda_i v_i, 1\leqslant i\leqslant n$. 于是

$$\chi_V(x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i,\quad \chi_V(x^2)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2.$$

由于 $\{v_i\otimes v_j+v_j\otimes v_i \mid i\leqslant j\}$ 是 $S^2(V)$ 的一个基，

$\{v_i\otimes v_j - v_j\otimes v_i \mid i<j\}$是$\Lambda^2(V)$的一个基，并且

$$(\rho_x\otimes\rho_x)(v_i\otimes v_j + v_j\otimes v_i) = \lambda_i\lambda_j(v_i\otimes v_j + v_j\otimes v_i),$$

$$(\rho_x\otimes\rho_x)(v_i\otimes v_j - v_j\otimes v_i) = \lambda_i\lambda_j(v_i\otimes v_j - v_j\otimes v_i),$$

因此

$$\chi_{S^2(V)}(x) = \sum_{i\leqslant j}\lambda_i\lambda_j = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2 + \sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right],$$

$$\chi_{\Lambda^2(V)}(x) = \sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j = \frac{1}{2}\left[\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2\right],$$

这就证明了(4). ▌

例 1 计算对称群 S_3 的不可约线性表示的特征标——不可约特征标.

解 首先，$G=S_3$ 有两个 1 次表示：单位表示 $\rho_0: G\to GL(C)$与符号表示 $\rho_s: G\to GL(C)$，它们分别由

$$\rho_0(x)(1)=1, \quad \rho_s(x)(1)=\operatorname{sgn}(x)1, \quad x\in G$$

定义.

G 还有一个自然的置换表示 $\rho: G\to GL(C^3)$，它置换 3 维向量空间 C^3 的标准基$\{e_1,e_2,e_3\}$，即对任意的 $x\in G$，$\rho_x(e_i)=e_{x(i)}$，它等价于

$$\rho_x(z_1,z_2,z_3)=(z_{x^{-1}(1)},z_{x^{-1}(2)},z_{x^{-1}(3)}),$$

这里$(z_1,z_2,z_3)=z_1e_1+z_2e_2+z_3e_3\in C^3$. 这个线性表示包含一个与单位表示同构的 1 次表示，它以 $e_1+e_2+e_3$ 为基. 它在 C^3 中的补子空间

$$V=\{(z_1,z_2,z_3)\in C^3 \mid z_1+z_2+z_3=0\}$$

给出 G 的一个 2 次线性表示 $\tau: G\to GL(V)$. 因为 V 不含 G 作用下稳定的 1 维子空间，它是不可约的，称为 G 的标准表示. 取

$$v_1=e_1-e_2, \quad v_2=e_2-e_3$$

是 V 的一个基，则 $\rho_0(x)$，$\rho_s(x)$与$\tau(x)$关于对应的基的矩阵为：

x	(1)	(1 2)	(1 3)	(2 3)	(1 2 3)	(1 3 2)
ρ_0	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]	[1]
ρ_s	[1]	[−1]	[−1]	[−1]	[1]	[1]
τ	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & -1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}-1 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$

于是得到相应的特征标表：

$\mathfrak{C}(x)$	(1)	(1 2)	(1 2 3)
$c(x)$	1	3	2
χ_{ρ_0}	1	1	1
χ_{ρ_s}	1	−1	1
χ_τ	2	0	−1

容易验证：$\chi_\rho=\chi_{\rho_0}+\chi_\tau$，$\chi_{V\otimes V}=\chi_\tau^2=\chi_{\rho_0}+\chi_{\rho_s}+\chi_\tau$，$\chi_{S^2(V)}=\chi_\rho$ 及 $\chi_{\Lambda^2(V)}=\chi_{\rho_s}$. 以后我们将证明 G 有且仅有 3 个不可约特征标：χ_{ρ_0}，χ_{ρ_s}与 χ_τ.

对于 G 的线性表示 $\rho: G\to GL(V)$，我们关心的问题之一是怎样把 V 分解成单 $C[G]$-模的直和. 作为第一步是要找出那些与单位表示同构的 1 次不可约表示，它们的直和就是

$$V^G=\{v\in V\mid \rho_x(v)=v,\quad \forall x\in G\}.$$

令

$$p=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_x\in \mathrm{End}_C(V),$$

对任意的 $y\in G$，由于

$$\rho_y p\rho_y^{-1}=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_y\rho_x\rho_y^{-1}=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_{yxy^{-1}}=p,$$

我们有 $p\in \mathrm{End}_{C[G]}(V)$. 对于 $v\in V^G$，因为

$$p(v)=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_x(v)=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}v=v,$$

所以 $V^G\subseteq \mathrm{Im}\,p$. 反之，设

$$v=p(w)=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_x(w)\in \mathrm{Im}\,p,$$

对任意的 $y\in G$,因为

$$\rho_y(v)=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_y\rho_x(w)=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho_{yx}(w)=p(w)=v,$$

所以 $\mathrm{Im}\,p\subseteq V^G$. 于是,$V^G=\mathrm{Im}\,p$. 又因为 $p^2=p$,所以 p 是 V 到 V^G 上的射影.

考虑到 V 中与单位表示同构的 1 次不可约线性表示的个数

$$m=\dim_C V^G=\mathrm{tr}(p)=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\chi_V(x).$$

如果 $\rho: G\to GL(V)$本身是一个与单位表示不同构的不可约线性表示时,因为 $\dim_C V^G=0$,有 $\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\chi_V(x)=0$.

设 V 与 W 是 G 的两个线性表示,由 §1,我们有

$$\mathrm{Hom}_C(V,W)^G=\mathrm{Hom}_{C[G]}(V,W).$$

由于存在显然的同构

$$\mathrm{Hom}_C(V\oplus V',W)\cong\mathrm{Hom}_C(V,W)\oplus\mathrm{Hom}_C(V',W),$$

$$\mathrm{Hom}_C(V,W\oplus W')\cong\mathrm{Hom}_C(V,W)\oplus\mathrm{Hom}_C(V,W'),$$

如果 V 是单 $C[G]$-模,由 Schur 引理,$\dim_C\mathrm{Hom}_C(V,W)^G$ 等于 W 分解为单 $C[G]$-模的直和时与 V 同构的单$C[G]$-模的数目. 类似地,如果 W 是单 $C[G]$-模,$\dim_C\mathrm{Hom}_C(V,W)^G$ 等于 V 分解为单 $C[G]$-模的直和时与 W 同构的单$C[G]$-模的数目. 因此,当 V 与 W 都是单 $C[G]$-模时,我们有

$$\dim_C\mathrm{Hom}_C(V,W)^G=\begin{cases}1, & V\cong W \text{ 时},\\ 0, & V\not\cong W \text{ 时}.\end{cases}$$

因为同构的线性表示有相等的特征标,而 $\mathrm{Hom}_C(V,W)\cong V^*\otimes_C W$,所以 $\chi_{\mathrm{Hom}_C(V,W)}=\chi_{V^*\otimes_C W}=\bar{\chi}_V\chi_W$,于是

$$\dim_C\mathrm{Hom}_C(V,W)^G=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{\chi_V(x)}\chi_W(x),$$

从而

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{\chi_V(x)}\chi_W(x)=\begin{cases}1, & V\cong W \text{ 时},\\ 0, & V\not\cong W \text{ 时}.\end{cases}$$

易见 G 上的复值类函数全体 $F_C(G)$ 成为一个 $\boldsymbol{C}$-向量空间，我们可以在 $F_C(G)$ 上定义一个 Hermite 内积(,)：

$$(\varphi,\psi)=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{\varphi(x)}\psi(x),$$

其中 $\varphi,\psi\in F_C(G)$. 这样，我们已经证明了

定理 2.4 有限群 G 的不可约线性表示的特征标关于上面定义的内积是正规正交的. ▌

设 $\mathfrak{C}_1,\cdots,\mathfrak{C}_h$ 是 G 的全部共轭类，令

$$f_i(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathfrak{C}_i\text{ 时},\\ 0, & x\notin\mathfrak{C}_i\text{ 时},\end{cases}$$

则 $\{f_1,\cdots,f_h\}$ 是 $F_C(G)$ 作为 $\boldsymbol{C}$-向量空间的基. 互不同构的不可约线性表示的特征标在 $F_C(G)$ 内是线性无关的，因此 G 的互不同构的不可约线性表示的数目不超过 G 的共轭类的数目.

定理 2.5 设 $\rho: G\to GL(V)$ 是 G 的一个线性表示，假定 V 分解成单 $\boldsymbol{C}[G]$-模的直和

$$V=W_1\oplus\cdots\oplus W_k.$$

又设 $\tau: G\to GL(W)$ 是 G 的一个不可约线性表示，则 V 中与 W 同构的 W_i 的数目等于 (χ_V,χ_W).

我们把整数 (χ_V,χ_W) 称为 W 在 V 中的**重数**.

证明 由命题 2.3，$\chi_V=\chi_{W_1}+\cdots+\chi_{W_k}$，从而 $(\chi_V,\chi_W)=(\chi_{W_1},\chi_x)+\cdots+(\chi_{W_k},\chi_W)$. 但是定理 2.4 表明 $(\chi_{W_i},\chi_W)=1$ 当且仅当 $W_i\cong W$，$(\chi_{W_i},\chi_W)=0$ 当且仅当 $W_i\not\cong W$，于是定理得证. ▌

定理 2.5 又一次证明了在 V 的典范分解中，与单 $\boldsymbol{C}[G]$-模 W 同构的 W_i 出现的重数 $a_i=(\chi_V,\chi_W)$ 与 V 的分解无关.

推论 2.6 G 的两个线性表示具有相同的特征标当且仅当它们是同构的.

证明 具有相同的特征标的两个线性表示有相同的典范分解，从而它们是同构的. 反之是显然的. ▌

定理 2.7 设 $\rho: G\to GL(V)$ 是 G 的一个线性表示，则

(χ_V,χ_V)是正整数且$(\chi_V,\chi_V)=1$当且仅当ρ是不可约的.

证明 设$V=a_1W_1\oplus\cdots\oplus a_hW_h$是$V$的典范分解,由命题2.3,$\chi_V=a_1\chi_{W_1}+\cdots+a_h\chi_{W_h}$.又由定理2.4,有

$$(\chi_V,\chi_V)=\sum_{i=1}^{h}a_i^2,$$

于是定理得证. ▌

例 2 正则表示的分解.

回忆一下§1的例2,容易看出Reg_1关于基$\{v_y\mid y\in G\}$的矩阵是单位矩阵,而$x\neq 1$时,Reg_x关于这个基的矩阵是对角线元素全为0的置换矩阵,因此正则表示的特征标reg由

$$\mathrm{reg}(x)=\begin{cases}|G|, & x=1\text{ 时},\\ 0, & x\neq 1\text{ 时}\end{cases}$$

给出,并且只要$|G|>1$,正则表示一定是可约的.

设$W_1,\cdots,W_h$是全部互不同构的单$\boldsymbol{C}[G]$-模,又设

$$V=a_1W_1\oplus\cdots\oplus a_hW_h$$

是V的典范分解,其中V是正则表示Reg的表示空间.那么

$$\begin{aligned}a_i&=(\mathrm{reg},\chi_{W_i})=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{\mathrm{reg}(x)}\chi_{W_i}(x)\\&=\chi_{W_i}(1)=\dim_{\boldsymbol{C}}W_i,\end{aligned}$$

从而每个单$\boldsymbol{C}[G]$-模W在V中出现的重数为$\dim_{\boldsymbol{C}}W$,并且

$$|G|=(\mathrm{reg},\mathrm{reg})=\sum_{i=1}^{h}(\dim_{\boldsymbol{C}}W_i)^2=\dim_{\boldsymbol{C}}V.$$

因为

$$\mathrm{reg}=\sum_{i=1}^{h}a_i\chi_{W_i}=\sum_{i=1}^{h}(\dim_{\boldsymbol{C}}W_i)\chi_{W_i},$$

所以对每个$x\in G,x\neq 1$,有

$$\sum_{i=1}^{h}(\dim_{\boldsymbol{C}}W_i)\chi_{W_i}(x)=0.$$

现在我们可以确定G的互不同构的不可约线性表示的数目.

命题 2.8 设f是G上类函数,$\rho:G\to GL(V)$是G的一个

线性表示. 令

$$\varphi_{f,V}=\sum_{x\in G}f(x)\rho_x: V\to V,$$

则 $\varphi_{f,V}$ 是一个 $C[G]$-模同态. 又若 ρ 是 n 次不可约线性表示, 则 $\varphi_{f,V}$ 是一个**位似**, 位似系数 λ 为

$$\lambda=\frac{1}{n}\sum_{x\in G}f(x)\chi_V(x)=\frac{|G|}{n}(\bar{\chi}_V,f).$$

证明 对任意的 $y\in G, v\in V$, 我们有

$$\begin{aligned}\varphi_{f,V}\rho_y(v)&=\sum_{x\in G}f(x)\rho_x(\rho_y(v)) \quad (\text{用 } yxy^{-1}\text{代替 } x)\\&=\sum_{x\in G}f(yxy^{-1})\rho_{yxy^{-1}}(\rho_y(v))\\&=\sum_{x\in G}f(x)\rho_{yx}(v)\\&=\rho_y\Big(\sum_{x\in G}f(x)\rho_x(v)\Big)\\&=\rho_y\varphi_{f,V}(v),\end{aligned}$$

因此 $\varphi_{f,V}$ 是一个 $C[G]$-模同态. 根据 Schur 引理, 当 ρ 不可约时, $\varphi_{f,V}=\lambda|_V(\lambda\in C)$ 是一个位似. 考虑 $\varphi_{f,V}$ 的迹, 有

$$\mathrm{tr}(\varphi_{f,V})=\lambda\dim_C V=n\lambda$$

及

$$\mathrm{tr}(\varphi_{f,V})=\sum_{x\in G}f(x)\mathrm{tr}(\rho_x)=\sum_{x\in G}f(x)\chi_V(x).$$

于是命题得证. ▌

定理 2.9 有限群 G 的不可约表示的数目等于 G 的共轭类的数目.

证明 我们已经知道, $F_C(G)$ 作为 C-向量空间的维数等于 G 的共轭类的数目, G 的不可约线性表示的特征标是线性无关的, 并且对于 G 的任意两个不可约特征标 χ_W 与 $\chi_{W'}$,

$$(\chi_W,\chi_{W'})=\begin{cases}1, & W\cong W'\text{时},\\0, & W\not\cong W'\text{时},\end{cases}$$

因此我们只要证明 G 的全部互不相等的不可约特征标成为 $F_C(G)$

的一个正规正交基. 为此，只要证明与每个不可约特征标的共轭都正交的类函数一定等于零.

设 $f\in F_C(G)$，对每个单 $C[G]$-模 W，有 $(\overline{\chi}_W, f)=0$. 由命题 2.8知 $\varphi_{f,W}=0$，从而对每个 $C[G]$-模 V，有 $\varphi_{f,V}=0$. 特别，对于 G 的正则表示 $\mathrm{Reg}: G\to GL(V)$，因为 $\varphi_{f,V}=0$，所以

$$0=\varphi_{f,V}(v_1)=\sum_{x\in G}f(x)\mathrm{Reg}_x(v_1)=\sum_{x\in G}f(x)v_x.$$

但是，$\{v_x \mid x\in G\}$ 是 V 的一个基，迫使 $f(x)=0$ 对所有 $x\in G$ 成立，从而 $f=0$. ▍

从现在起，设 $\chi_1,\cdots,\chi_h$ 分别是互不同构的单 $C[G]$-模 $W_1,\cdots,W_h$ 的特征标，其中 h 等于 G 的共轭类的数目. 特别，χ_1 是平凡模 W_1 对应的单位表示的特征标. G 的特征标表可以用一个 h 行 h 列的数表构成，例如 $G=S_3$ 的特征标表可以写成下表：

$\mathfrak{C}(x)$	(1)	(1 2)	(1 2 3)
$c(x)$	1	3	2
χ_{ρ_0}	1	1	1
χ_{ρ_s}	1	-1	1
χ_r	2	0	-1

其中 $\mathfrak{C}(x)$表示以 x 为代表元的共轭类，$c(x)$等于共轭类 $\mathfrak{C}(x)$所含元素个数. 定理 2.4 已经证明了 G 的特征标表的行是两两正交的，用定理 2.9 可以证明 G 的特征标表的列也是两两正交的，即

命题 2.10 设 $x\in G$，则

(1) $\sum_{i=1}^{h}\overline{\chi_i(x)}\chi_i(x)=\frac{|G|}{c(x)}$；

(2) 对 $y\in G$，若 $y\notin\mathfrak{C}(x)$，则 $\sum_{i=1}^{h}\overline{\chi_i(x)}\chi_i(y)=0$.

证明 令

$$f_x(y)=\begin{cases}1, & y\in\mathfrak{C}(x)\text{时},\\ 0, & y\notin\mathfrak{C}(x)\text{时},\end{cases}$$

则 $f_x \in F_C(G)$. 由定理 2.9，$f_x = \sum_{i=1}^{h} b_i \chi_i$，其中

$$b_i = (\chi_i, f_x) = \frac{1}{|G|} \sum_{y \in G} \overline{\chi_i(y)} f_x(y) = \frac{c(x)}{|G|} \overline{\chi_i(x)}.$$

因此，对每个 $y \in G$，有

$$f_x(y) = \frac{c(x)}{|G|} \sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(x)} \chi_i(y).$$

于是，当 $y = x$ 时得到(1)，当 $y \notin \mathfrak{C}(x)$时得到(2). ▌

由命题 2.10，特别，当 $x = 1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(1)} \chi_i(1) = |G| = \sum_{i=1}^{h} (\dim_C W_i)^2;$$

当 $x \neq 1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{h} \overline{\chi_i(1)} \chi_i(x) = 0 = \sum_{i=1}^{h} (\dim_C W_i) \chi_i(x).$$

这恰好是我们在例 2 中得到的两个公式.

设 $\rho: G \to GL(V)$是 G 的一个线性表示，V 有典范分解

$$V = a_1 W_1 \oplus \cdots \oplus a_h W_h.$$

令 $V_i = \underbrace{W_i \oplus \cdots \oplus W_i}_{a_i 个} (1 \leqslant i \leqslant h)$. 考虑 V 上线性变换

$$p_i = \frac{\dim_C W_i}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_i(x)} \rho_x: V \to V,$$

由命题 2.8，p_i 是一个 $\boldsymbol{C}[G]$-模同态，它限制于不可约线性表示 W_j 时是一个位似 $\lambda \mathbf{1}_{W_j}$，其中

$$\lambda = \frac{1}{\dim_C W_j} \operatorname{tr}(p_i) = \frac{\dim_C W_i}{\dim_C W_j} \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_i(x)} \chi_j(x).$$

因此，

$$\lambda = \begin{cases} 1, & i = j \text{ 时}, \\ 0, & i \neq j \text{ 时}, \end{cases}$$

即 $p_i|_{V_i} = \mathbf{1}_{V_i}$，$p_i|_{V_j} = \mathbf{0}$，$j \neq i$. 对任意的 $x \in V$，有

$$x = x_1 + \cdots + x_h,$$

其中 $x_i \in V_i$，$1 \leqslant i \leqslant h$. 于是，$p_i(x) = p_i(x_1) + \cdots + p_i(x_h) = x_i$，$p_i$

是 V 到 V_i 上的射影.

例 3 对称群 S_4 与交错群 A_4 的特征标表.

由第一章 § 1 例 3，我们已经知道 S_4 有 24 个元素，它们分成 5 个共轭类，代表元分别是(1)，(1 2)，(1 2 3)，(1 2 3 4) 与 (1 2)(3 4)，这些共轭类分别有 1,6,8,6,3 个元素. 如果我们把一个特征标 χ 在每个共轭类上的取值作为分量，那么可用一个行向量来表示这个特征标. 显然，S_4 有两个 1 次不可约特征标：单位表示的特征标 $\chi_1=(1,1,1,1,1)$与符号表示的特征标 $\chi_2=(1,-1,1,-1,1)$. 由于 S_4 在 C^4 上的自然的置换表示 $\chi_\rho=(4,2,1,0,0)$，$\chi_4=\chi_\rho-\chi_1=(3,1,0,-1,-1)$满足$(\chi_4,\chi_4)=1$，因此 χ_4 是 S_4 的一个 3 次不可约特征标. 类似的，$\chi_5=\chi_4\chi_2=(3,-1,0,1,-1)$也是 S_4 的一个 3 次不可约特征标. 根据前面的一般讨论，S_4 还有一个 2 次不可约特征标 χ_3. 利用命题 2.10(2)，可以直接计算出 $\chi_3=(2,0,-1,0,2)$. 于是得到 S_4 的特征标表：

$\mathfrak{C}(x)$	(1)	(1 2)	(1 2 3)	(1 2 3 4)	(1 2)(3 4)
$c(x)$	1	6	8	6	3
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	-1	1
χ_3	2	0	-1	0	2
χ_4	3	1	0	-1	-1
χ_5	3	-1	0	1	-1

考虑 χ_3 对应的 2 次不可约线性表示，由于(1 2)(3 4)是一个 2 阶元素，它对应的线性变换的迹是 2，因此一定是恒等变换. 于是，这个线性表示也是商群

$$S_4/\{(1),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}\cong S_3$$

的一个线性表示. 易见它就是 S_3 的标准表示.

对于交错群 A_4，共轭类 $\mathfrak{C}((1\ 2\ 3))$分裂成两个共轭类 $\{(1\ 2\ 3),(1\ 4\ 2),(1\ 3\ 4),(2\ 3\ 4)\}$与$\{(1\ 3\ 2),(1\ 2\ 4),(1\ 4\ 3),$

(2 4 3)},因此 A_4 有 4 个互不同构的不可约线性表示. 由于商群

$$A_4/\{(1),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}\cong C_3,$$

但是循环群 C_3 的不可约特征标是很容易求出的:设 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$,则 C_3 的特征标表是:

$\mathfrak{C}(x)$	1	x	x^2
$c(x)$	1	1	1
χ_1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2
χ_3	1	ω^2	ω

于是我们得到 A_4 的三个 1 次不可约特征标:$\chi_1=(1,1,1,1)$,$\chi_2=(1,\omega,\omega^2,1)$与 $\chi_3=(1,\omega^2,\omega,1)$. 根据前面的一般讨论,$A_4$ 还有一个 3 次不可约特征标,利用命题 2.10(2),得到 $\chi_4=(3,0,0,-1)$. 从而得到 A_4 的特征标表:

$\mathfrak{C}(x)$	(1)	(1 2 3)	(1 3 2)	(1 2)(3 4)
$c(x)$	1	4	4	3
χ_1	1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2	1
χ_3	1	ω^2	ω	1
χ_4	3	0	0	-1

一般说来,要算出一个群的特征标表是一件困难的事情. 但是对于对称群 S_n 而言,这个问题已经由 G. Frobenius, I. Schur 与 A. Young 圆满地解决了,有兴趣的读者可以进一步参考[Ja2].

定理 2.11 G 为 Abel 群的充分必要条件是 G 的每个不可约线性表示都是 1 次的.

证明 设 G 有 h 个不可约线性表示,次数分别是 $n_1,\cdots,n_h$. 由定理 2.9,h 等于 G 的共轭类的数目. 又由例 2,$|G|=n_1^2+\cdots+n_h^2$. 因此,G 为 Abel 群当且仅当 $|G|=h$,从而当且仅当 $n_1=\cdots=n_h$

$=1.$ ▌

推论 2.12 设 A 是有限群 G 的一个 Abel 子群，则 G 的每个不可约线性表示的次数不超过 A 在 G 中的指数 $[G:A]$.

证明 设 $\rho: G \to GL(V)$ 是 G 的一个不可约线性表示，限制到子群 A 上，定义了 A 的一个线性表示 $\rho_A: A \to GL(V)$. 一般说来，ρ_A 不再是不可约的，除非 V 本身是 1 次不可约线性表示. 由定理 2.11，设 $W \subseteq V$ 是 V 的一个单 $\boldsymbol{C}[A]$-模，则 $\dim_{\boldsymbol{C}} W=1$. 令 V' 是 V 的 $\boldsymbol{C}$-子空间，它由所有 $\rho_x(W)$ $(x \in G)$ 生成，从而是 V 的 $\boldsymbol{C}[G]$-子模. 但是，V 是单 $\boldsymbol{C}[G]$-模的事实迫使 $V'=V$. 对任意的 $x \in G$，$y \in A$，因为

$$\rho_{xy}(W)=\rho_x\rho_y(W)=\rho_x(W),$$

所以不同的 $\rho_x(W)$ 至多只有 $[G:A]$ 个，即 $\dim_{\boldsymbol{C}} V \leqslant [G:A]$. ▌

最后考虑 G 是它的两个子群 G_1 与 G_2 的直积的情形，即 $G=G_1 \times G_2$. 设 $\rho^{(1)}: G_1 \to GL(V_1)$ 与 $\rho^{(2)}: G_2 \to GL(V_2)$ 是 G_1 与 G_2 的线性表示，通过

$$(\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)})(x_1x_2)=\rho_{x_1}^{(1)} \otimes \rho_{x_2}^{(2)}, \quad x_1 \in G_1, x_2 \in G_2$$

定义 G 的线性表示 $\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$，称为线性表示 $\rho^{(1)}$ 与 $\rho^{(2)}$ 的张量积. 如果 χ_1 与 χ_2 分别是 $\rho^{(1)}$ 与 $\rho^{(2)}$ 的特征标，那么 $\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$ 的特征标 χ 由

$$\chi(x_1x_2)=\chi_1(x_1)\chi_2(x_2), \quad x_1 \in G_1, x_2 \in G_2$$

给出. 并且可以证明

定理 2.13 若 $\rho^{(1)}$ 与 $\rho^{(2)}$ 分别是 G_1 与 G_2 的不可约线性表示，则 $\rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}$ 是 $G=G_1 \times G_2$ 的不可约线性表示，并且 G 的每个不可约线性表示具有这种形式.

证明 当 $\rho^{(1)}$ 与 $\rho^{(2)}$ 是不可约线性表示时，由定理 2.4 有

$$\frac{1}{|G_1|}\sum_{x_1 \in G_1} \overline{\chi_1(x_1)}\chi_1(x_1)=1,$$

$$\frac{1}{|G_2|}\sum_{x_2 \in G_2} \overline{\chi_2(x_2)}\chi_2(x_2)=1.$$

两式相乘得到

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x_1\in G_1}\sum_{x_2\in G_2}\overline{\chi(x_1x_2)}\chi(x_1x_2)=1,$$

于是 $\rho^{(1)}\otimes\rho^{(2)}$ 是不可约线性表示.

为了证明 G 的每个不可约线性表示具有这种形式，只要证明与所有形如 $\chi_1(x_1)\chi_2(x_2)$ 的特征标都正交的类函数 $f(x_1x_2)$ 一定等于零. 假定 $f\in F_C(G)$ 使得

$$\sum_{x_1\in G_1}\sum_{x_2\in G_2}f(x_1x_2)\overline{\chi_1(x_1)\chi_2(x_2)}=0$$

对所有的不可约特征标 χ_1 与 χ_2 成立，我们取定 χ_2 并令

$$g(x_1)=\sum_{x_2\in G_2}f(x_1x_2)\overline{\chi_2(x_2)},\quad x_1\in G_1,$$

则对 G_1 的每个不可约特征标 χ_1 有

$$\sum_{x_1\in G_1}g(x_1)\overline{\chi_1(x_1)}=0.$$

因为 g 是 G_1 上类函数，所以 $g=0$，于是

$$\sum_{x_2\in G_2}f(x_1x_2)\overline{\chi_2(x_2)}=0$$

对每个 $x_1\in G_1$ 及 G_2 的每个不可约特征标 χ_2 成立. 但是，对每个取定的 $x_1\in G_1$，$f(x_1x_2)$ 是 G_2 上类函数，因此 $f(x_1x_2)=0$ 对所有的 $x_1\in G_1$ 与 $x_2\in G_2$ 成立，从而 $f\equiv 0$. ▌

显然，当 $G=G_1\ltimes G_2$ 是 G_1 与 G_2 的半直积时，定理 2.13 的前半部分仍然成立，即 $\rho^{(1)}$ 与 $\rho^{(2)}$ 分别是 G_1 与 G_2 的不可约线性表示时，$\rho^{(1)}\otimes\rho^{(2)}$ 是 G 的不可约线性表示.

习　题

1. 设 $x\in G$，对于 G 的每个不可约特征标 χ 有 $\chi(x)=\chi(1)$，证明 $x=1$.

2. 设 S 是一个有限集，ρ 是 G 关于 S 的置换表示，χ 是 ρ 的特征标. 又设 $x\in G$，证明 $\chi(x)$ 等于 S 中被 x 固定的元素的个数.

3. 设 X 是一个有限集，G 作用在 X 上，ρ 是对应的置换表示，χ 是 ρ 的特征标. 证明

(1) X 中互不相同的轨道的数目等于置换表示 ρ 中所含单位表示的重数.

(2) 设 G 通过 $a(x,y)=(ax,ay)$ 作用在积集合 $X\times X$ 上，其中 $a\in G$，$x,y\in X$，则对应的置换表示的特征标是 χ^2.

(3) 设 G 在 X 上的作用是传递的且 X 至少含两个元素，则下述性质等价：

(i) G 是二重传递的，即对任意的 $x,y,x',y'\in X$，$x\neq y$，$x'\neq y'$，存在 $a\in G$ 使得 $x'=ax$，$y'=ay$；

(ii) G 在 $X\times X$ 上的作用恰好有两个轨道；

(iii) $(\chi^2,1)=2$.

4. 求出循环群 C_n 的特征标表.

5. 设 ρ 是 G 的 n 次不可约线性表示，特征标为 χ. 证明 $|\chi(x)|\leqslant n$，并且等号成立当且仅当 ρ_x 是一个位似，因此 $\rho_x=1_V \Longleftrightarrow \chi(x)=n$，其中 $x\in G$.

6. 设 $\rho^1: G\to GL(V_1)$ 与 $\rho^2: G\to GL(V_2)$ 是 G 的两个不可约线性表示，h 是 V_1 到 V_2 的线性映射，令

$$h^0=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\rho^1(x)h(\rho^2(x))^{-1},$$

又令 $\rho^1(x)$ 与 $\rho^2(x)$ 在适当选取基下所对应的矩阵分别是

$$(r^1_{ij}(x))及(r^2_{kl}(x)).$$

(1) 若 ρ^1 与 ρ^2 不同构，则 $h^0=0$，且

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}r^1_{ij}(x)\overline{r^2_{lk}(x)}=0;$$

(2) 若 $V_1=V_2$，$\rho^1=\rho^2$，则 h^0 是一个位似，位似系数为

$$\frac{1}{n}\mathrm{tr}(h),$$

其中 $n=\dim V_1$，且

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} r^1_{ij}(x)\overline{r^2_{lk}(x)} = \frac{1}{n}\delta_{il}\delta_{jk}.$$

§3 群代数与表示环

我们已经在§1指出，群代数 $\boldsymbol{C}[G]$ 是半单的. 设 $W_1,\cdots,W_h$ 是全部互不同构的单 $\boldsymbol{C}[G]$-模，记 $n_i=\dim_{\boldsymbol{C}}W_i$，$\rho_i: G\to GL(W_i)$ $(1\leqslant i\leqslant h)$ 是 G 的互不同构的不可约线性表示，则 ρ_i 可以线性地扩充为 $\boldsymbol{C}$-代数同态

$$\tilde{\rho}_i:\ \boldsymbol{C}[G]\to \mathrm{End}_{\boldsymbol{C}}(W_i)\cong \boldsymbol{M}_{n_i}(\boldsymbol{C}).$$

这样，$\{\tilde{\rho}_i\}_{1\leqslant i\leqslant h}$ 定义了 $\boldsymbol{C}$-代数同态

$$\tilde{\rho}:\ \boldsymbol{C}[G]\to \bigoplus_{i=1}^{h}\mathrm{End}_{\boldsymbol{C}}(W_i)\cong \bigoplus_{i=1}^{h}\boldsymbol{M}_{n_i}(\boldsymbol{C}),$$

使得 $\tilde{\rho}_i=\pi_i\cdot\tilde{\rho}$，其中 $\pi_i: \bigoplus\limits_{i=1}^{h}\mathrm{End}_{\boldsymbol{C}}(W_i)\to\mathrm{End}_{\boldsymbol{C}}(W_i)$ 是典范射影.

命题 3.1 上面定义的同态 $\tilde{\rho}$ 是个同构.

证明 由于

$$|G|=\dim_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{C}[G]=\sum_{i=1}^{h}(\dim_{\boldsymbol{C}}W_i)^2=\sum_{i=1}^{h}n_i^2,$$

两边的维数是相同的，所以我们只要证明 $\tilde{\rho}$ 是单一同态就够了. 设 $f=\sum\limits_{x\in G}a(x)x\in\boldsymbol{C}[G]$，其中 $a(x)\in\boldsymbol{C}$. 若 $\tilde{\rho}(f)=0$，则 $\tilde{\rho}_i(f)=0$ $(1\leqslant i\leqslant h)$，从而 $\widetilde{\mathrm{Reg}}(f)=\sum\limits_{x\in G}a(x)\mathrm{Reg}_x=0$. 设 V 是正则表示 Reg 的表示空间，$\{v_x\}_{x\in G}$ 是 V 的基，则

$$\widetilde{\mathrm{Reg}}(f)(v_1)=\sum_{x\in G}a(x)\mathrm{Reg}_x(v_1)=\sum_{x\in G}a(x)v_x=0,$$

因此对每个 $x\in G$，$a(x)=0$. 于是 $f=0$，即 $\tilde{\rho}$ 是单一同态. ▮

由于 $\tilde{\rho}$ 是个同构，我们可以考虑它的逆映射.

命题 3.2（Fourier 逆公式） 设 $u=\sum\limits_{x\in G}u(x)x\in\boldsymbol{C}[G]$，又设

$\widetilde{\rho}(u)=\{u_i\}_{1\leqslant i\leqslant h}\in\bigoplus_{i=1}^{h}\mathrm{End}_C(W_i)$，其中 $u_i=\widetilde{\rho}_i(u)$ $(1\leqslant i\leqslant h)$，则

$$u(x)=\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{h}(\dim_C W_i)\mathrm{tr}_{W_i}(\rho_i(x^{-1})u_i).$$

证明 由于线性，不妨设 $u=y\in G$. 于是

$$u(x)=\delta_{xy}$$

且

$$\mathrm{tr}_{W_i}(\rho_i(x^{-1})u_i)=\chi_i(x^{-1}y),$$

这里 χ_i 是 G 的不可约线性表示 ρ_i 的特征标. 现在，我们只要证明

$$\frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{h}(\dim_C W_i)\chi_i(x^{-1}y)=\delta_{xy}$$

成立，但这就是在命题 2.10 的证明后所指出的两个公式. ▌

现在，我们考虑 $\mathbf{C}[G]$的中心 $Z(\mathbf{C}[G])$. 设 $\mathfrak{C}$ 是 G 的一个共轭类，令 $e_{\mathfrak{C}}=\sum_{x\in\mathfrak{C}}x$，由 $ye_{\mathfrak{C}}y^{-1}=\sum_{x\in G}yxy^{-1}=e_{\mathfrak{C}}$，$e_{\mathfrak{C}}\in Z(\mathbf{C}[G])$. 又因为所有这些 $e_{\mathfrak{C}}$ 是 G 的元素的互不相交的集合上的和，它们是线性无关的. 最后，若 $u=\sum_{x\in G}a(x)x\in Z(\mathbf{C}[G])$，由

$$yuy^{-1}=\sum_{x\in G}a(x)yxy^{-1}=\sum_{x\in G}a(x)x=u,$$

比较两边系数，得

$$a(x)=a(y^{-1}xy)$$

对所有的 $y\in G$ 成立，从而 u 是 $e_{\mathfrak{C}}$ 的线性组合. 由此可见，这些 $e_{\mathfrak{C}}$ 形成 $Z(\mathbf{C}[G])$的一个基，并且 $\dim_C Z(\mathbf{C}[G])=h=G$ 中共轭类的数目.

命题 3.3 同态 $\widetilde{\rho}_i$ 把 $Z(\mathbf{C}[G])$映到 W_i 的位似所成的集合内，并且定义了一个代数同态

$$\omega_i:\ Z(\mathbf{C}[G])\to\mathbf{C}.$$

若 $u=\sum_{x\in G}u(x)x\in Z(\mathbf{C}[G])$，则

$$\omega_i(u)=\frac{1}{\dim_C W_i}\mathrm{tr}_{W_i}(\widetilde{\rho}_i(u))=\frac{1}{\dim_C W_i}\sum_{x\in G}u(x)\chi_i(x).$$

证明 这只是命题 2.8 的另一种表述方式罢了. ▍

命题 3.4 命题 3.3 中给出的这一族代数同态$\{\omega_i\}_{1\leqslant i\leqslant h}$定义了 $Z(\boldsymbol{C}[G])$到 $\boldsymbol{C}^h$ 上的代数同构,其中 $\boldsymbol{C}^h=\underbrace{\boldsymbol{C}\times\cdots\times\boldsymbol{C}}_{h次}$.

证明 如果我们考虑 $\boldsymbol{C}[G]$与$\bigoplus_{i=1}^{h}\mathrm{End}_{\boldsymbol{C}}(W_i)$的代数同构,它把 $Z(\boldsymbol{C}[G])$映到 $\mathrm{End}_{\boldsymbol{C}}(W_i)$的中心的直和,但是 $\mathrm{End}_{\boldsymbol{C}}(W_i)$的中心由位似组成,因此得到所定义的同构. ▍

为了进一步讨论 G 的不可约线性表示的次数,我们要先考虑特征标的整性质.

命题 3.5 设 χ 是 G 的线性表示 $\rho: G\to GL(V)$的特征标,则对每个 $x\in G$,$\chi(x)$是一个代数整数.

证明 由于 $\chi(x)=\mathrm{tr}(\rho_x)=\rho_x$ 的特征值的和,ρ_x 的特征值都是单位根,它们自然是代数整数. ▍

命题 3.6 设 $u=\sum_{x\in G}u(x)x\in Z(\boldsymbol{C}[G])$,其中 $u(x)$都是代数整数,则 u 在 $\mathbf{Z}$ 上整.

证明 设 $\mathfrak{C}_1,\cdots,\mathfrak{C}_h$ 是 G 的共轭类,$e_i=e_{\mathfrak{C}_i}=\sum_{x\in\mathfrak{C}_i}x$,$x_i\in\mathfrak{C}_i$,则 $u=\sum_{i=1}^{h}u(x_i)e_i$. 由第一章的推论 3.11,只要证明每个 e_i 在 $\mathbf{Z}$ 上整就够了. 因为 e_ie_j 是 e_k 的整系数线性组合,所以 $Z(\boldsymbol{C}[G])$的子群 $\mathbf{Z}e_1\oplus\cdots\oplus\mathbf{Z}e_h$ 是一个子环,它在 $\mathbf{Z}$ 上是有限生成的,从而由第一章的定理 3.10,其中的每个元素都在 $\mathbf{Z}$ 上整,命题得证. ▍

从这个命题,我们立刻得到下面的两个推论.

推论 3.7 设 ρ 是 G 的 n 次不可约线性表示,特征标是 χ. 若 $u=\sum_{x\in G}u(x)x\in Z(\boldsymbol{C}[G])$,其中每个 $u(x)$都是代数整数,则

$$\frac{1}{n}\sum_{x\in G}u(x)\chi(x)$$

是一个代数整数.

证明 注意到$\frac{1}{n}\sum_{x\in G}u(x)\chi(x)$是 u 在命题 3.3 所定义的代数同态

$$\omega: Z(\boldsymbol{C}[G])\to\boldsymbol{C}$$

下的像，现在 u 在 $\boldsymbol{Z}$ 上整，因此 $\omega(u)$是一个代数整数. ▌

推论 3.8 G 的每个不可约线性表示的次数是 G 的阶$|G|$的一个因子.

证明 考虑 $u=\sum_{x\in G}\chi(x^{-1})x\in Z(\boldsymbol{C}[G])$，它满足推论 3.7 的条件，因此$\frac{1}{n}\sum_{x\in G}\chi(x^{-1})\chi(x)=\frac{|G|}{n}$是一个代数整数，但是$\frac{|G|}{n}$是一个有理数，所以它必须是整数. ▌

以后我们还要更精确地估计 G 的不可约线性表示的次数. 为了今后讨论问题时方便起见，我们定义群 G 的**表示环** $R(G)$.

设 $\chi_1,\cdots,\chi_h$ 是 G 的互不相等的不可约特征标，考虑

$$R(G)=\boldsymbol{Z}\chi_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{Z}\chi_h,$$

由命题 2.3，它是一个有恒等元的交换环，其中乘法恒等元就是单位表示的特征标 χ_1. $R(G)$中的每个元素称为 G 的**虚特征标**. 显然，G 上类函数是一个特征标当且仅当它可以写成 $\chi_1,\cdots,\chi_h$ 的非负整线性组合. 令

$$R^+(G)=\boldsymbol{N}\chi_1\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{N}\chi_h\subseteq R(G),$$

其中的元素就称为 G 的**真特征标**. 回忆前面定义的 G 上复值类函数全体所成的 $\boldsymbol{C}$-向量空间 $F_{\boldsymbol{C}}(G)$，如果像特征标一样定义类函数的乘法，那么 $F_{\boldsymbol{C}}(G)$成为一个有恒等元的交换环，并且 $F_{\boldsymbol{C}}(G)=\boldsymbol{C}\otimes_{\boldsymbol{Z}}R(G)$.

$R(G)$也可以看作有限生成 $\boldsymbol{C}[G]$-模范畴上的 **Grothendieck 群**. 对于每个有限生成 $\boldsymbol{C}[G]$-模 V，定义 $R(G)$的一个生成元$[V]$，这些生成元之间还满足关系式

$$[V]+[W]-[V\oplus W]=0,$$

于是 $R(G)$就是由满足上述关系式的生成元所生成的一个加法交

换群. 进一步由 $C[G]$-模的张量积来定义生成元之间的乘法

$$[V][W]=[V\otimes_C W],$$

再线性扩充为 $R(G)$上的乘法,使 $R(G)$成为一个环. 由于完全可约性,可以用所有的单 $C[G]$-模 $W_1,\cdots,W_h$ 在 $R(G)$中的像的整系数线性组合 $\sum_{i=1}^{h}a_i[W_i]$ $(a_i\in \mathbf{Z},1\leqslant i\leqslant h)$来表示 $R(G)$的元素. 于是

$$\chi:\ R(G)\to F_C(G)$$

定义了一个环同态. 由于 G 的线性表示完全由它的特征标所确定,所以这是一个单一同态,并且诱导一个同构

$$\chi_C:\ C\otimes_Z R(G)\to F_C(G).$$

如果 L 是一个域,群代数 $L[G]$不一定是半单代数,但是我们照样能考虑有限生成 $L[G]$-模范畴的 Grothendieck 群 $R_L(G)$. 先回忆一下所谓 $L[G]$-模同态的序列

$$0\longrightarrow V'\xrightarrow{f}V\xrightarrow{g}V''\longrightarrow 0$$

称为一个 $L[G]$-模的**短正合列**,如果 f 是单一同态,g 是满同态,并且 $\mathrm{Ker}g=\mathrm{Im}f$. 于是,对于每个有限生成 $L[G]$-模 V,定义 $R_L(G)$的一个生成元$[V]$,它们满足关系式$[V]=[V']+[V'']$,如果有 $L[G]$-模的短正合列 $0\to V'\to V\to V''\to 0$. 这样,$R_L(G)$就是由满足上述关系的生成元所生成的一个加法交换群,与在 $R_C(G)$中定义乘法一样,可以在 $R_L(G)$中定义乘法使得 $R_L(G)$成为一个有恒等元的交换环. 同样可以定义 $R_L^+(G)$为集合$\{[E]\mid E$ 是有限生成 $L[G]$-模$\}$,其中$[E]$是 E 在 $R_L(G)$中的像.

设 S_L 是单 $L[G]$-模同构类的代表元集合,即 G 在 L-向量空间上的不可约线性表示的同构类的代表元集合.

命题 3.9 $\{[E]\mid E\in S_L\}$是有限生成 $L[G]$-模范畴的 Grothendieck 群 $R_L(G)$的基,即 $R_L(G)$作为自由 $\mathbf{Z}$-模的一个 $\mathbf{Z}$-基.

证明 设 R 是以$\{[E]|E\in S_L\}$为基的自由 Z-模，定义同态

$$\alpha:\ R\to R_L(G),$$

它把每个$[E]$映到$[E]$，$E\in S_L$. 对任意的 $L[G]$-模 F，用 $l_E(F)$表示 $E\in S_L$ 在 F 的合成列中作为合成因子出现的次数(这里我们假定了 F 有一个合成列. 其实，由于群代数 $L[G]$的左理想满足极小条件，每个有限生成 $L[G]$-模有合成列，见[CR2，p. 41]). 显然 l_E 是 F 的加法函数，即对每个有限生成 $L[G]$-模的短正合列 $0\to F'\to F\to F''\to 0$，有 $l_E(F)=l_E(F')+l_E(F'')$. 于是可以定义同态

$$\beta_E:\ R_L(G)\to \mathbf{Z}$$

为 $\beta_E([F])=l_E(F)$. 这些同态 $\beta_E(E\in S_L)$定义了同态

$$\beta:\ R_L(G)\to R,$$

它使得 $\beta([F])=\sum\limits_{E\in S_L}l_E(F)[E]$. 易见 α 与 β 互为逆映射，从而有$\{[E]|E\in S_L\}$是 $R_L(G)$的一个基. ▌

因此，$R_L^+(G)$的元素恰好是基元素$\{[E]|E\in S_L\}$的非负整系数线性组合.

当 L 是特征为零的数域而 $\boldsymbol{C}$ 是 L 的代数闭包时，可以把 $R_L(G)$看作 $R(G)$的子环，一般说来它们未必相等. 什么时候它们才相等呢？这是表示论中的有理性问题，有兴趣的读者可以参考[S]或[CSh]等.

可以证明，当 L 包含所有 m 次单位根时，$R_L(G)=R(G)$，其中 m 是 G 的元素的阶的最小公倍数.

习　题

1. 设 $\chi_1,\cdots,\chi_h$ 是 G 的不可约特征标，它们的次数分别是 $n_1,\cdots,n_h$. 令

$$p_i=\frac{n_i}{|G|}\sum_{x\in G}\chi_i(x^{-1})x,$$

证明：$p_1,\cdots,p_h$ 形成 $\boldsymbol{C}[G]$的中心 $Z(\boldsymbol{C}[G])$的基，并且 $p_i^2=p_i$，

$p_i p_j = 0 \ (i \neq j), p_1 + \cdots + p_h = 1.$

2. 证明命题 3.6 中涉及的子环 $\mathbf{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}e_h$ 是群 G 在 $\mathbf{Z}$ 上群代数 $\mathbf{Z}[G]$ 的中心.

3. (**Plancherel 公式**)　设 $u = \sum_{x \in G} u(x)x$, $v = \sum_{x \in G} v(x)x$ 是 $C[G]$ 中的两个元素,令

$$(u, v) = |G| \sum_{x \in G} u(x^{-1}) v(x),$$

证明

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{h} n_i \mathrm{tr}_{W_i}(\widetilde{\rho}_i(uv)),$$

其中 $W_i, \widetilde{\rho}_i, n_i$ 的意义见 § 3.

4. 设 $\chi \in R(G)$,证明 χ 是一个不可约特征标当且仅当 $(\chi, \chi) = 1$ 且 $\chi(1) \geqslant 0$.

5. 设 φ 是 G 上实值类函数,$(\varphi, \chi_1) = 0$ 且对每个 $x \neq 1$, $\varphi(x) \leqslant 0$,其中 χ_1 是 G 的单位表示的特征标. 证明:对每个特征标 χ, (φ, χ) 的实部 $\mathrm{Re}(\varphi, \chi) \geqslant 0$,从而当 $\varphi \in R(G)$ 时,φ 是一个特征标.

§ 4　诱导表示及其特征标

诱导表示是群表示论的一个重要研究课题,它揭示了群 G 及其子群的线性表示之间的联系,提供了一个构造线性表示的有效方法.

回忆一下,群 G 关于子群 H 的左陪集空间 $G \backslash H$ 可以用 G 的一个子集 S 来作为其代表元集,并且 G 中每个元素可以唯一地写成 $x = sy$,其中 $y \in H, s \in S$.

设 $\rho: G \to GL(V)$ 是 G 的线性表示,$\rho_H: H \to GL(V)$ 是把 ρ 限制于子群 H 所得到的 H 的线性表示,通常称为线性表示 ρ 的**限制**,记为 $\mathrm{Res}_H^G \rho$ 或 $\mathrm{Res}_H^G V$. 又设 $W \subset V$ 是 $\mathrm{Res}_H^G V$ 的 $C[H]$-子模,即 W 是 V 的在所有 $\rho_y (y \in H)$ 下稳定的子空间,并令 θ: $H \to$

$GL(W)$是对应的线性表示. 对任意的 $x\in G$, $\rho_x(W)$只依赖于左陪集 xH, 所以对 H 的每个左陪集 $sH(s\in S)$可以定义 V 的子空间 $W_s=\rho_s(W)$, 并且 $\sum\limits_{s\in S}W_s$ 成为 V 的一个 $C[G]$-子模. 若

$$V=\bigoplus_{s\in S}W_s,$$

则称 ρ 是由 H 的线性表示 θ **诱导**的, 记为 $\rho=\mathrm{Ind}_H^G\theta$ 或 $V=\mathrm{Ind}_H^G W$. 这时, 每个 $v\in V$ 可以唯一地写成 $v=\sum\limits_{s\in S}v_s$, $v_s\in W_s$, 并且 $V=\bigoplus\limits_{s\in S}\rho_s(W)$, 所以 $\dim_C V=[G:H]\dim_C W$.

引理4.1 如果 $\rho:G\to GL(V)$是由 $\theta:H\to GL(W)$诱导的, $\rho':G\to GL(V')$是 G 的线性表示, $f:W\to V'$是线性映射, 对每个 $y\in H$, $w\in W$ 有 $f(\theta_y(w))=\rho'_y(f(w))$, 那么存在唯一的线性映射 $F:V\to V'$, 它扩充了 f 并且对所有的 $x\in G$ 有 $F\circ\rho_x=\rho'_x\circ F$.

证明 *存在性* 设 $v\in W_s$, 取 $x\in sH$, 定义

$$F_s(v)=\rho'_x(f(\rho_x^{-1}(v))).$$

对任意的 $y\in H$, 用 xy 代替 x, 有

$$\begin{aligned}\rho'_{xy}(f(\rho_{xy}^{-1}(v)))&=\rho'_x\rho'_y(f(\theta_y^{-1}\rho_x^{-1}(v)))\\&=\rho'_x(f(\theta_y\theta_y^{-1}\rho_x^{-1}(v)))\\&=\rho'_x(f(\rho_x^{-1}(v))),\end{aligned}$$

因此 F_s 的定义与陪集代表元的取法无关. 因为 $V=\bigoplus\limits_{s\in S}W_s$, 所以存在唯一的线性映射 $F:V\to V'$, 它扩充了每个 $F_s:W_s\to V'$, 即对于典范内射 $\iota_s: W_s\to\bigoplus\limits_{s\in S}W_s=V$, 有 $F\circ\iota_s=F_s$, $s\in S$. 进一步可以验证 $F\circ\rho_x=\rho'_x\circ F$ 对所有 $x\in G$ 成立: 设 $v\in W_s$, $w\in W$ 使得 $v=\rho_s(w)$, 对于 $x\in G$, 存在 $y\in H$, $s'\in S$ 使得 $xs=s'y$, 于是

$$\begin{aligned}F\rho_x(v)&=F(\rho_x(\rho_s(w)))=F(\rho_{xs}(w))=F(\rho_{s'y}(w))\\&=F(\rho_{s'}(\theta_y(w)))=\rho'_{s'}(f(\rho_{s'}^{-1}\rho_{s'}(\theta_y(w))))\\&=\rho'_{s'}(f(\theta_y(w)))=\rho'_{s'}\rho'_y(f(w))\\&=\rho'_{s'y}(f(w))=\rho'_{xs}(f(w))=\rho'_x\rho'_s(f(w))\end{aligned}$$

$$=\rho'_x(\rho'_s(f(\rho_s^{-1}\rho_s(w))))=\rho'_x F(\rho_s(w))=\rho'_x F(v).$$

唯一性 如果 F 满足引理的条件，对 $v\in\rho_s(W)$，有 $\rho_s^{-1}(v)\in W$，并且

$$F(v)=F(\rho_s\rho_s^{-1}(v))=\rho'_s F(\rho_s^{-1}(v))=\rho'_s f(\rho_s^{-1}(v))$$

决定了 $\rho_s(W)$ 在 F 下的像，但是 V 是这些 $\rho_s(W)$ 的直和，因此决定了 V 在 F 下的像. ▎

定理4.2 设 $\theta: H\to GL(W)$ 是群 G 的子群 H 的线性表示，则存在 G 的线性表示 $\rho: G\to GL(V)$ 使得 $\rho=\mathrm{Ind}_H^G\theta$，并且在同构意义下是唯一的.

证明 *存在性* 对每个 $s\in S$，取 $W_s=W$ 并把 W_s 中对应于 $w\in W$ 的元素记作 $\rho_s(w)$. 设 $V=\bigoplus\limits_{s\in S}W_s$，$V$ 中每个元素可以唯一地写成 $v=\sum\limits_{s\in S}\rho_s(w_s)$，$w_s\in W$. 又设 $x\in G$，存在 $y\in H$，$s'\in S$ 使得 $xs=s'y$. 定义

$$\rho_x(\rho_s(w_s))=\rho_{s'}(\theta_y(w_s)),$$

可以证明 $\rho_{x'}\rho_x(\rho_s(w_s))=\rho_{x'x}(\rho_s(w_s))$ 对任意的 $x'\in G$ 成立，从而它定义了 G 在 V 内的一个线性表示. 现在，对 $x'\in G$，存在 $y'\in H$，$s''\in S$ 使得 $x's'=s''y'$，从而 $(x'x)s=x'(xs)=x'(s'y)=(x's')y=(s''y')y=s''(y'y)$. 于是

$$\rho_{x'}(\rho_x(\rho_s(w_s)))=\rho_{x'}(\rho_{s'}(\theta_y(w_s)))=\rho_{s''}(\theta_{y'}(\theta_y(w_s)))$$

及

$$\rho_{x'x}(\rho_s(w_s))=\rho_{s''}(\theta_{y'y}(w_s))=\rho_{s''}(\theta_{y'}(\theta_y(w_s))).$$

唯一性 设 $\rho': G\to GL(V')$ 是 G 的另一个由 θ 诱导的线性表示，因为 $\dim_C V=[G:H]\dim_C W=\dim_C V'$，我们只要证明存在满映射 $F: V\to V'$ 使得 $F|_W=\mathbf{1}_W$ 且 $F\circ\rho_x=\rho'_x\circ F$ 对所有 $x\in G$ 成立. 但是引理4.1表明映射 F 的像包含所有的 $\rho'_s(W)(s\in S)$，从而 F 是满映射. ▎

为了今后叙述时方便，我们给出诱导表示的另一种刻画方式. 设 H 是 G 的子群，S 是 G 关于 H 的左陪集代表元集. 又设 W 是

H 的一个线性表示，$V=\mathrm{Ind}_H^G W$ 是 G 的一个由 W 诱导的线性表示. 因为 $V=\bigoplus_{s\in S}\rho_s(W)$，$\boldsymbol{C}[G]$作为右 $\boldsymbol{C}[H]$-模的基恰好由 S 中的元素组成，并且 $\boldsymbol{C}[G]$自然是一个左 $\boldsymbol{C}[G]$-模，所以 $\boldsymbol{C}[G]\otimes_{\boldsymbol{C}[H]}W$ 是由 W 经过从 $\boldsymbol{C}[H]$到 $\boldsymbol{C}[G]$的纯量扩充得到的 $\boldsymbol{C}[G]$-模. 此外，向量空间的单一映射 $W\to V$ 线性扩充为 $\boldsymbol{C}[G]$-模同态

$$i:\ \boldsymbol{C}[G]\otimes_{\boldsymbol{C}[H]}W\to V,$$

并且两边的维数都等于$[G:H]\dim_{\boldsymbol{C}}W$，从而 i 是一个同构. 于是我们可以定义 $\mathrm{Ind}_H^G W=\boldsymbol{C}[G]\otimes_{\boldsymbol{C}[H]}W=\bigoplus_{s\in S}s\otimes W$，其 G-模结构定义为：对 $x\in G$，$w\in W$，有

$$x(s\otimes w)=xs\otimes w=s'y\otimes w=s'\otimes yw,$$

其中 $xs=s'y$，$y\in H$，$s,s'\in S$.

诱导表示的这种刻画使得它的存在性与唯一性成为显然的. 下面罗列诱导表示的几个性质：

1. **传递性** 设 $E<H<G$，U 是一个 $\boldsymbol{C}[E]$-模，则

$$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Ind}_E^H U)\cong\mathrm{Ind}_E^G U.$$

首先，我们有 $\boldsymbol{C}$-向量空间同构：

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Ind}_E^H U)&=\boldsymbol{C}[G]\otimes_{\boldsymbol{C}[H]}(\boldsymbol{C}[H]\otimes_{\boldsymbol{C}[E]}U)\\&\cong(\boldsymbol{C}[G]\otimes_{\boldsymbol{C}[H]}\boldsymbol{C}[H])\otimes_{\boldsymbol{C}[E]}U\\&\cong\boldsymbol{C}[G]\otimes_{\boldsymbol{C}[E]}U=\mathrm{Ind}_E^G U.\end{aligned}$$

注意到这个同构与 G 的左乘作用可交换，因此是一个 G-模同构.

2. **可加性** 设 W_1与 W_2是两个 $\boldsymbol{C}[H]$-模，则

$$\mathrm{Ind}_H^G(W_1\oplus W_2)\cong\mathrm{Ind}_H^G W_1\oplus\mathrm{Ind}_H^G W_2.$$

事实上，由

$$\boldsymbol{C}[G]\otimes_{\boldsymbol{C}[H]}(W_1\oplus W_2)\cong\boldsymbol{C}[G]\otimes_{\boldsymbol{C}[H]}W_1\oplus\boldsymbol{C}[G]\otimes_{\boldsymbol{C}[H]}W_2$$

可得上述结论.

3. 设 W_1与 W_2是两个 $\boldsymbol{C}[H]$-模，$f:\ W_1\to W_2$是 $\boldsymbol{C}[H]$-模同态. 又设 $i_1:\ W_1\to\mathrm{Ind}_H^G W_1$与 $i_2:\ W_2\to\mathrm{Ind}_H^G W_2$是典范的$\boldsymbol{C}[H]$-模的单一同态，则存在 $\boldsymbol{C}[G]$-模同态 $F:\ \mathrm{Ind}_H^G W_1\to\mathrm{Ind}_H^G W_2$使得下图

$$\begin{array}{ccc} W_1 & \xrightarrow{f} & W_2 \\ \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle i_2} \\ \mathrm{Ind}_H^G W_1 & \xrightarrow{F} & \mathrm{Ind}_H^G W_2 \end{array}$$

是交换图，即 $i_2 \circ f = F \circ i_1$.

这就是引理4.1的另一种说法.

4. 设 W 是 $\boldsymbol{C}[H]$-模，$W_1 \subseteq W$ 是一个 $\boldsymbol{C}[H]$-子模，则 $\mathrm{Ind}_H^G W_1 \subseteq \mathrm{Ind}_H^G W$ 是一个 $\boldsymbol{C}[G]$-子模.

事实上，由 $\mathrm{Ind}_H^G W_1 = \bigoplus_{s \in S} \rho_s(W_1) \subseteq \bigoplus_{s \in S} \rho_s(W) = \mathrm{Ind}_H^G W$ 可得上述结论.

5. **张量积** 设 W 是 $\boldsymbol{C}[H]$-模，V 是 $\boldsymbol{C}[G]$-模，则

$$(\mathrm{Ind}_H^G W) \otimes_{\boldsymbol{C}} V \cong \mathrm{Ind}_H^G (W \otimes_{\boldsymbol{C}} \mathrm{Res}_H^G V).$$

事实上，对 $s \in S$，$w \in W$ 与 $v \in V$，通过

$$\varphi((s \otimes w) \otimes v) = s \otimes (w \otimes s^{-1} v)$$

定义一个映射 φ: $(\mathrm{Ind}_H^G W) \otimes_{\boldsymbol{C}} V \to \mathrm{Ind}_H^G (W \otimes_{\boldsymbol{C}} \mathrm{Res}_H^G V)$. 易见，这是一个 $\boldsymbol{C}$-向量空间同构. 对任意的 $x \in G$，当 $xs = s'y$ 使得 $y \in H$ 时，有

$$\begin{aligned} x(\varphi((s \otimes w) \otimes v)) &= x(s \otimes (w \otimes s^{-1} v)) = xs \otimes (w \otimes s^{-1} v) \\ &= s' \otimes y(w \otimes s^{-1} v) = s' \otimes (yw \otimes ys^{-1} v), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x((s \otimes w) \otimes v)) &= \varphi(x(s \otimes w) \otimes xv) = \varphi((xs \otimes w) \otimes xv) \\ &= \varphi((s' \otimes yw) \otimes xv) = s' \otimes (yw \otimes (s')^{-1} xv). \end{aligned}$$

注意到 $(s')^{-1} x = ys^{-1}$，所以 φ 是一个 G-模同构.

特别，$\mathrm{Ind}_H^G(\mathrm{Res}_H^G V) \cong \mathrm{Ind}_H^G(\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{C}} \mathrm{Res}_H^G V) \cong (\mathrm{Ind}_H^G \boldsymbol{C}) \otimes_{\boldsymbol{C}} V$. 但是由 H 的单位表示诱导的 G 的线性表示恰好是 G 在左陪集空间 $G \backslash H$ 上的置换表示 η: $G \to GL(P)$，其中 $P = \bigoplus_{s \in S} \boldsymbol{C}_s$，$\boldsymbol{C}_s = \boldsymbol{C}$.

考虑从表示环 $R_{\boldsymbol{C}}(H)$ 到 $R_{\boldsymbol{C}}(G)$ 的映射

$$\mathrm{Ind}_H^G : R_C(H) \to R_C(G),$$

由性质2，这是一个加法群同态，即 Grothendieck 群之间的同态，一般说来，它并不是一个环同态，但是性质5告诉我们，$\mathrm{Ind}_H^G R_C(H)$ 是 $R_C(G)$ 的一个理想.

命题4.3 设 W 是 $C[H]$-模，V 是 $C[G]$-模，则

$$\mathrm{Hom}_{C[H]}(W, \mathrm{Res}_H^G V) \cong \mathrm{Hom}_{C[G]}(\mathrm{Ind}_H^G W, V).$$

证明 这就是引理4.1. ▌

下面计算 (θ, W) 的诱导表示 $(\rho, V) = (\rho, \mathrm{Ind}_H^G W)$ 的特征标，仍设 S 为 G 关于子群 H 的左陪集代表元集.

定理4.4 对每个 $x \in G$，

$$\chi_V(x) = \sum_{\substack{s \in S \\ s^{-1}xs \in H}} \chi_W(s^{-1}xs) = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{z \in G \\ z^{-1}xz \in H}} \chi_W(z^{-1}xz).$$

证明 由于 $V = \bigoplus_{s \in S} \rho_s(W)$，$\rho_x$ 置换这些 $\rho_s(W)$，即 $\rho_x(\rho_s(W)) = \rho_{xs}(W) = \rho_{s'}(W)$，其中 $xs = s'y$ 使得 $y \in H$，$s' \in S$. 为了计算 $\mathrm{tr}_V(\rho_x)$，只要考虑使 $xs = sy$，即 $s^{-1}xs \in H$ 的 $\rho_s(W)$，于是

$$\mathrm{tr}_V(\rho_x) = \sum_{\substack{s \in S \\ s^{-1}xs \in H}} \mathrm{tr}_{\rho_s(W)}\left(\rho_x|_{\rho_s(W)}\right).$$

因为 ρ_s 定义了 W 到 $\rho_s(W)$ 的一个同构，对于使 $s^{-1}xs \in H$ 的 $s \in S$ 有

$$\rho_s \theta_{s^{-1}xs} = (\rho_x|_{\rho_s(W)})\rho_s,$$

所以 $\mathrm{tr}_{\rho_s(W)}(\rho_x|_{\rho_s(W)}) = \mathrm{tr}_W(\theta_{s^{-1}xs})$. 又因为左陪集 sH 中每个元素可以写成 sy ($y \in H$) 的形式，$\chi_W(s^{-1}xs) = \chi_W(y^{-1}s^{-1}xsy) = \chi_W(z^{-1}xz)$，所以第二个等式也成立. ▌

如果 $\mathfrak{C}(x) \cap H$ 在 H 中分裂成 r 个共轭类 $\mathfrak{D}_1, \cdots, \mathfrak{D}_r$ 的不相交的并，那么

$$\chi_V(x) = \chi_V(\mathfrak{C}(x)) = \frac{1}{|H|} \sum_{i=1}^{r} |Z_G(x)| |\mathfrak{D}_i| \chi_W(\mathfrak{D}_i),$$

其中乘以因子 $|Z_G(x)|$ 是由于 $z^{-1}a^{-1}xaz = z^{-1}xz$ 对所有

$a\in Z_G(x)$和 $z\in G$ 成立，又由第一章推论1.11，$|Z_G(x)|=|G|/|\mathfrak{C}(x)|$，所以有

$$\chi_V(x)=\chi_V(\mathfrak{C}(x))=\frac{|G|}{|H||\mathfrak{C}(x)|}\sum_{i=1}^{r}|\mathfrak{D}_i|\chi_W(\mathfrak{D}_i).$$

特别，当 W 是 H 的单位表示时，$\chi_W(\mathfrak{D}_i)=1,1\leqslant i\leqslant r$，从而

$$\chi_V(x)=\chi_V(\mathfrak{C}(x))=\frac{|G||\mathfrak{C}(x)\cap H|}{|H||\mathfrak{C}(x)|}$$

$$=\frac{[G:H]|\mathfrak{C}(x)\cap H|}{|\mathfrak{C}(x)|}.$$

设 $f\in F_C(H)$，通过

$$f'(x)=\frac{1}{|H|}\sum_{\substack{z\in G\\ z^{-1}xz\in H}}f(z^{-1}xz),\quad x\in G,$$

定义了 G 上的函数 f'，我们就称 f'是由 f 诱导的，并记作 $f'=\mathrm{Ind}_H^G f$. 注意到每个类函数是特征标的线性组合，由定理2.4有

命题 4.5 $\mathrm{Ind}_H^G f$ 是 G 上的类函数. ▌

回忆一下，我们在 C-向量空间 $F_C(G)$上定义的 Hermite 内积 $(\ ,\ )_G$. 设 $\alpha,\beta\in F_C(G)$，

$$(\alpha,\beta)_G=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{\alpha(x)}\beta(x).$$

对于两个 $C[G]$-模 V_1与 V_2，我们把

$$(V_1,V_2)_G=\dim_C\mathrm{Hom}_{C[G]}(V_1,V_2)$$

称为 V_1与 V_2的**交结数**，并且有

引理 4.6 $(V_1,V_2)_G=(\chi_{V_1},\chi_{V_2})_G$.

证明 由于定理1.4及命题2.3，可以不妨假定 V_1与 V_2都是单 $C[G]$-模，于是引理结论由定理2.4得到. ▌

定理 4.7（Frobenius 互反性） 设 $\psi\in F_C(H)$，$\varphi\in F_C(G)$，则

$$(\psi,\mathrm{Res}_H^G\varphi)_H=(\mathrm{Ind}_H^G\psi,\varphi)_G.$$

证明 由于每个类函数是特征标的线性组合，我们可以假定 $\psi\in R_C(H)$，$\varphi\in R_C(G)$，于是定理由命题4.3和引理4.6得到. 如果

记

$$\dot{\psi}(x)=\begin{cases}\psi(x), & x\in H \text{ 时},\\ 0, & x\notin H \text{ 时},\end{cases}$$

我们也可以通过直接计算来证明 Frobenius 互反性：

$$\begin{aligned}(\mathrm{Ind}_H^G\psi,\varphi)_G&=\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{z\in G}\overline{\dot{\psi}(z^{-1}xz)}\varphi(x)\\&=\frac{1}{|G|}\frac{1}{|H|}\sum_{x\in G}\sum_{z\in G}\overline{\dot{\psi}(z^{-1}xz)}\varphi(z^{-1}xz)\\&=\frac{1}{|H|}\sum_{y\in G}\overline{\dot{\psi}(y)}\varphi(y)\\&=\frac{1}{|H|}\sum_{y\in H}\overline{\psi(y)}\varphi(y)=(\psi,\mathrm{Res}_H^G\varphi)_H.\end{aligned}$$ ▍

特别，当 ψ 是 H 的不可约特征标，φ 是 G 的不可约特征标时，Frobenius 互反性告诉我们：当 $\mathrm{Res}_H^G\,\varphi$ 写成 H 的不可约特征标的线性组合，$\mathrm{Ind}_H^G\,\psi$ 写成 G 的不可约特征标的线性组合时，ψ 在 $\mathrm{Res}_H^G\,\varphi$ 中出现的重数等于 φ 在 $\mathrm{Ind}_H^G\,\psi$ 中出现的重数.

习　题

1. 设 V 是一个 $C[G]$-模，$V=\bigoplus_{i\in I}W_i$ 是向量空间的直和，这些 W_i 被 G 可传递地置换. 又设 $W=W_{i_0}$，$i_0\in I$，H 是 W 在 G 中的稳定子群，则 W 是一个 $C[H]$-模且 $V=\mathrm{Ind}_H^G W$.

2. 证明 G 的每个不可约线性表示含在某个子群 H 的不可约线性表示的诱导表示内.

3. 设 G 是两个子群 H 与 K 的直积，θ 是 H 的一个线性表示，ρ 是 G 的一个线性表示且 $\rho=\mathrm{Ind}_H^G\theta$，又设 Reg_K 是 K 的正则表示，证明：ρ 同构于 $\theta\otimes\mathrm{Reg}_K$.

4.（诱导表示概念的推广） 设 α：$H\to G$ 是群同态，$\tilde{\alpha}$：$C[H]\to C[G]$是对应的群代数同态. 设 E 是 $C[G]$-模，φ 是 E 的特征标. 记 $\mathrm{Res}_\alpha E$ 是 E 通过 $\tilde{\alpha}$得到的 $C[H]$-模，其特征标是 $\mathrm{Res}_\alpha\varphi=\varphi\circ\alpha$. 又设 W 是 $C[H]$-模，ψ 是 W 的特征标，记 $\mathrm{Ind}_\alpha W=C[G]\otimes_{C[H]}W$

是一个 $C[G]$-模，它的特征标是 $\mathrm{Ind}_\alpha\psi$. 证明

(1) 互反公式 $(\psi,\mathrm{Res}_\alpha\varphi)_H=(\mathrm{Ind}_\alpha\psi,\varphi)_G$；

(2) 若 α 是满同态，$N=\mathrm{Ker}\alpha$，等同 G 与 H/N，则 $\mathrm{Ind}_\alpha W$ 与 W 的在 N 的作用下不变的元素组成的子空间所成的 $C[G]=C[H/N]$-模同构，并且

$$(\mathrm{Ind}_\alpha\psi)(x)=\frac{1}{|N|}\sum_{\alpha(y)=x}\psi(y).$$

5. 设 H 是 G 的子群，χ 是 G 关于左陪集空间 $G\backslash H$ 的置换表示的特征标. 证明 $\chi=\mathrm{Ind}_H^G1$，$\psi=\chi-1$是 G 的一个特征标，其中1是单位表示的特征标. 试决定在什么条件下 ψ 是不可约特征标.

6. 设 H 是 G 的子群，若对每个 $t\in H$，有 $H\cap tHt^{-1}=\{1\}$，则 H 称为 G 的 **Frobenius 子群**. 令 N 表示 G 的元素的子集，使得 N 中每个元素都不与 H 中的元素共轭.

(1) 证明 N 所含元素个数为 $|G|/|H|-1$；

(2) 设 $f\in F_C(H)$，证明存在唯一的 $\bar{f}\in F_C(G)$，使得

$$\bar{f}(n)=f(1),\quad n\in N,$$

并且 $\bar{f}(1)=f(h)$，$h\in H$；

(3) 设 ψ 是 G 的特征标，$\psi=\mathrm{Ind}_H^G1-1$（见习题5），证明

$$\bar{f}=\mathrm{Ind}_H^Gf-f(1)\psi;$$

(4) 证明 $(f_1,f_2)_H=(\bar{f}_1,\bar{f}_2)_G$；

(5) 设 f 是 H 的不可约特征标，又设 ρ 是对应的 G 的线性表示，证明：对每个 $x\in N$，$\rho_x=\mathbf{1}_V$[提示：用 §2习题5].

(6) (Frobenius 定理) 证明 H 的每个线性表示扩充为 G 的线性表示，它的核包含 N，因此 $N\cup\{1\}$是 G 的正规子群，并且 G 是 H 与 $N\cup\{1\}$的半直积.

(7) 若 G 是 H 与一个正规子群 N 的半直积，证明 H 是 G 的 Frobenius 子群的充分必要条件为对每个 $x\in H-\{1\}$及每个 $y\in N-\{1\}$，$xyx^{-1}\neq y$.

§5 Mackey 子群定理

设 H 与 K 是 G 的两个子群，$\theta: H \to GL(W)$ 是 H 的线性表示. 又设 $V=\mathrm{Ind}_H^G W$，$\rho: G \to GL(V)$ 是相应的诱导表示，我们要确定它在 K 上的限制 $\rho_K: K \to GL(V)$，$V=\mathrm{Res}_K^G \mathrm{Ind}_H^G W$.

考虑 G 关于 H 与 K 的双陪集分解

$$G=Kr_1H \cup Kr_2H \cup \cdots \cup Kr_tH,$$

其中 $Kr_iH=\{kr_ih \mid k\in K, h\in H\}$ $(1\leqslant i\leqslant t)$，$R=\{r_1,\cdots,r_t\}$ 是 G 关于 H 与 K 的双陪集分解的代表元集. 显然，G 中任意两个元素 x, y 在同一个双陪集中当且仅当存在 $k\in K, h\in H$ 使得 $y=kxh$，并且在双陪集 KrH 中恰好有 $[K: rHr^{-1}\cap K]$ 个 H 的左陪集，$[H: r^{-1}Kr\cap H]$ 个 K 的右陪集.

对于 $r\in R$，令 $H_r=rHr^{-1}\cap K$ 是 K 的子群，通过

$${}^r\theta_x(w)=\theta_{r^{-1}xr}(w), \quad x\in H_r, w\in W$$

定义了 H_r 的线性表示 ${}^r\theta: H_r \to GL({}^rW)$，其中 ${}^rW$ 就是 W，只是为了强调它是 H_r 的表示空间罢了.

定理5.1(Mackey) 设 H 与 K 是群 G 的两个子群，$\theta: H\to GL(W)$ 是 H 的线性表示，则 $\mathrm{Res}_K^G \mathrm{Ind}_H^G W=\bigoplus\limits_{r\in R} \mathrm{Ind}_{H_r}^K {}^rW$，这个直和分解与双陪集空间 $K/G\backslash H$ 的代表元集 R 的取法无关，即 $KrH=Kr'H$ 时，$\mathrm{Ind}_{H_r}^K {}^rW=\mathrm{Ind}_{H_{r'}}^K {}^{r'}W$.

证明 设 S 是左陪集空间 $G\backslash H$ 的代表元集，则

$$\mathrm{Ind}_H^G W=\bigoplus_{s\in S} \rho_s(W).$$

对每个双陪集 KrH，令

$$W(r)=\bigoplus_{sH\subset KrH} \rho_s(W),$$

它是 $\mathrm{Res}_K^G \mathrm{Ind}_H^G W$ 的一个 $C[K]$-子模，并且

$$\mathrm{Res}_K^G \mathrm{Ind}_H^G W=\bigoplus_{r\in R} W(r).$$

因此我们只要证明 $W(r)\cong\mathrm{Ind}_{H_r}^{K}{}^rW$ 就够了.

设 K 关于 H_r 的左陪集分解为

$$K=x_1H_r\cup\cdots\cup x_lH_r,$$

则

$$KrH=x_1rH\cup\cdots\cup x_lrH.$$

因为 $xrH=x'rH$ 当且仅当 $x^{-1}x'\in H_r$,所以 $\{x_1r,\cdots,x_lr\}$ 成为双陪集 KrH 关于 H 的左陪集的代表元集,从而

$$W(r)=\bigoplus_{i=1}^{l}\rho_{x_ir}(W)=\bigoplus_{i=1}^{l}\rho_{x_i}(\rho_r(W)).$$

定义 H_r 的线性表示 ${}_r\theta$: $H_r\to GL(\rho_r(W))$:对于 $x\in H_r$,存在 $y\in H$ 使得 $xr=ry$. 设 $w\in W$,规定 ${}_r\theta_x(\rho_r(w))=\rho_r(\theta_y(w))$,于是由 $w\mapsto\rho_r(w)$ 定义了向量空间的同构 φ: ${}^rW\to\rho_r(W)$,它也是 H_r 的两个线性表示 ${}^r\theta$ 与 ${}_r\theta$ 之间的同构,这是因为

$$\varphi({}^r\theta_x(w))=\varphi(\theta_{r^{-1}xr}(w))=\rho_r(\theta_{r^{-1}xr}(w))=\rho_r(\theta_y(w))$$
$$={}_r\theta_x(\rho_r(w))={}_r\theta_x(\varphi(w)),w\in W.$$

现在,由 $\rho_x(\rho_r(w))=\rho_r(\rho_y(w))=\rho_r(\theta_y(w))={}_r\theta_x(\rho_r(w))$,有 $\mathrm{Res}_{H_r}^{G}\rho={}_r\theta$,从而 $\mathrm{Ind}_{H_r}^{K}\rho_r(W)=\bigoplus_{i=1}^{l}\rho_{x_i}(\rho_rW)=W(r)$.

当 $KrH=Kr'H$ 时,$W(r)=\bigoplus_{sH\subset KrH}\rho_s(W)=\bigoplus_{sH\subset Kr'H}\rho_s(W)=W(r')$,从而 $\mathrm{Ind}_{H_r}^{K}{}^rW=\mathrm{Ind}_{H_{r'}}^{K}{}^{r'}W$. ▌

特别,当 $H\lhd G$ 且 $K=H$ 时,对每个 $s\in S$,通过 ${}^s\theta_x(w)=\theta_{s^{-1}xs}(w)$ 定义了 H 的一个线性表示 ${}^s\theta:H\to GL({}^sW)$,$x\in H$,$w\in W$,于是有 $\mathrm{Res}_H^G\,\mathrm{Ind}_H^GW=\bigoplus_{s\in S}{}^sW$.

利用 Mackey 子群定理可以证明下面的诱导表示不可约性的判别准则.

命题5.2 设 H 是群 G 的子群,$\theta:H\to GL(W)$ 是 H 的一个线性表示,则诱导表示 $\mathrm{Ind}_H^G\theta$ 是 G 的不可约线性表示的充分必要条件为:(1) θ 是 H 的不可约线性表示;(2) 对每个 $x\in G$ 但 $x\notin$

H，有$(\mathrm{Res}^{H}_{H_x}W, {}^{x}W)_{H_x}=0$.

证明 设$V=\mathrm{Ind}^{G}_{H}W$，则V是单$\boldsymbol{C}[G]$-模当且仅当$(V,V)_G=1$. 由 Frobenius 互反性，

$$(V,V)_G=(\mathrm{Ind}^{G}_{H}W,\mathrm{Ind}^{G}_{H}W)_G=(W,\mathrm{Res}^{G}_{H}\,\mathrm{Ind}^{G}_{H}W)_H.$$

但是 Mackey 子群定理告诉我们

$$\mathrm{Res}^{G}_{H}\,\mathrm{Ind}^{G}_{H}W=\bigoplus_{r\in R}\mathrm{Ind}^{H}_{H_r}{}^{r}W,$$

其中R是双陪集空间$H/G\backslash H$的代表元集. 于是

$$\begin{aligned}(V,V)_G&=(W,\bigoplus_{r\in R}\mathrm{Ind}^{H}_{H_r}{}^{r}W)_H=\sum_{r\in R}(W,\mathrm{Ind}^{H}_{H_r}{}^{r}W)_H\\&=\sum_{r\in R}(\mathrm{Res}^{H}_{H_r}W,{}^{r}W)_{H_r}.\end{aligned}$$

因为$1\in R$使得$(\mathrm{Res}^{H}_{H_1}W,{}^{1}W)_{H_1}=(W,W)_H\geqslant 1$，所以$(V,V)_G=1$当且仅当$(W,W)=1$，并且对所有的$r\in R,r\neq 1$，$(\mathrm{Res}^{H}_{H_r}W,{}^{r}W)_{H_r}=0$，这恰好是命题所列的两个条件. ▌

考虑$H\lhd G$的情形. 这时，$V=\mathrm{Ind}^{G}_{H}W$为单$\boldsymbol{C}[G]$-模的充分必要条件是W本身是一个单$\boldsymbol{C}[H]$-模，并且对所有的$x\in G,x\notin H$，W与${}^{x}W$作为$\boldsymbol{C}[H]$-模不同构.

命题5.3(Clifford) 设N是G的一个正规子群，V是单$\boldsymbol{C}[G]$-模，则

(1) 或者$\mathrm{Res}^{G}_{N}V$是互相同构的单$\boldsymbol{C}[N]$-模的直和；

(2) 或者存在G的真子群$H\supset N$以及$\boldsymbol{C}[H]$-模M使得$V=\mathrm{Ind}^{G}_{H}M$.

证明 首先，设W是$\mathrm{Res}^{G}_{N}V$的一个单$\boldsymbol{C}[N]$-子模，则对于每个$x\in G$，xW仍是一个单$\boldsymbol{C}[N]$-模，只要定义$y\in N$在xW上的作用为$y\cdot xw=x(x^{-1}yx)w$就够了.

其次，作为单$\boldsymbol{C}[N]$-模xW与${}^{x}W$同构. 如果定义$y\in N$在${}^{x}W$上的作用为$y\cdot w=(x^{-1}yx)w$，那么$w\mapsto xw$就定义了${}^{x}W$与xW之间的同构. 因为$\sum_{x\in G}xW\neq 0$是V的$\boldsymbol{C}[G]$-子模，所以$V=$

$\sum_{x\in G} xW$，并且存在 G 的子集 T 使得 $\mathrm{Res}_N^G V = \bigoplus_{t\in T} tW$，其中每个直和项互相共轭.

设 $x_1W,\cdots,x_rW$ 是 $\mathrm{Res}_N^G V$ 中互不同构的单 $\boldsymbol{C}[N]$-模的代表集，得到 $\mathrm{Res}_H^G V$ 的典范分解

$$\mathrm{Res}_H^G V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r,$$

其中 $V_i = a_iW_i$，$W_i = x_iW$，$a_i \in \boldsymbol{N}$，$1 \leqslant i \leqslant r$. 对任意的 $x \in G$，若 $xW_i = W_j$，则 $xV_i = a_ixW_i = a_iW_j \subset V_j = a_jW_j$，从而 $a_i \leqslant a_j$. 由于 $x^{-1}W_j = W_i$，同样可证 $a_j \leqslant a_i$. 于是 $a_1 = \cdots = a_r = a$，$\mathrm{Res}_N^G V = a(W_1 \oplus \cdots \oplus W_r)$，并且 G 可传递地作用在集合 $\{V_1,\cdots,V_r\}$ 上. 设 $H = \{x \in G \mid xV_1 = V_1\}$ 是 V_1 在 G 中的稳定子群. 若 $H = G$，则 $r = 1$，$\mathrm{Res}_N^G V = \underbrace{W_1 \oplus \cdots \oplus W_1}_{a\text{次}}$，这就是(1). 若 H 是 G 的真子群，则 $H \supset N$ 且 $r > 1$. 于是由 § 4习题1，$V = \mathrm{Ind}_H^G M$，其中 $M = V_1$，这就是(2). ▌

推论5.4 设 N 是群 G 的一个 Abel 正规子群，则 G 的每个不可约线性表示 $\rho: G \to GL(V)$ 的次数是 $[G:N]$ 的一个因子.

证明 我们对 G 的阶 $|G|$ 作归纳法. 根据本节习题7，在上述命题5.3的情形(2)时，存在 G 的真子群 $H \supset N$ 以及单 $\boldsymbol{C}[H]$-模 M，使得 $V = \mathrm{Ind}_H^G M$. 由归纳假设，$\dim_{\boldsymbol{C}} M$ 是 $[H:N]$ 的一个因子，于是，$\dim_{\boldsymbol{C}} V = [G:H]\dim_{\boldsymbol{C}} M$ 是 $[G:H][H:N] = [G:N]$ 的一个因子. 在上述命题 5.3 的情形(1)时，令 $G' = \rho(G)$，$N' = \rho(N)$. 因为典范映射 $G/N \to G'/N'$ 是满射，所以 $[G':N']$ 是 $[G:N]$ 的一个因子. 又因为 N 是 G 的 Abel 正规子群，所以对每个 $y \in N$，$\rho(y)$ 是一个位似，从而在 G' 的中心内. 现在，我们只要证明 $\dim_{\boldsymbol{C}} V$ 是 $[G':N']$ 的因子，这恰好是下述命题的直接推论. ▌

命题 5.5 G 的不可约线性表示 $\rho: G \to GL(V)$ 的次数是 $[G: Z(G)]$ 的一个因子.

证明 对于每个 $z \in Z(G)$，ρ_z 是一个位似 $\lambda(z)$，于是由 $z \mapsto \lambda(z)$ 定义了同态 $\lambda: Z(G) \to \boldsymbol{C}^*$.

对任意的正整数 m，考虑 G 的直积 $G^m=\underbrace{G\times\cdots\times G}_{m\text{次}}$ 的线性表示

$$\rho^m:\ G^m\to GL(V^{\otimes m}),$$

由定理 2.13，它是 G^m 的不可约线性表示. 对于 $z_1,\cdots,z_m\in Z(G)$，$\rho^m_{(z_1,\cdots,z_m)}=\rho_{z_1}\otimes\cdots\otimes\rho_{z_m}$ 同样是一个位似 $\lambda(z_1,\cdots,z_m)$. 令

$$H=\{(z_1,\cdots,z_m)\in G^m\,|\,z_1,\cdots,z_m\in Z(G)\text{ 且 }z_1\cdots z_m=e\},$$

它是 G^m 的一个子群，并且 H 平凡地作用在 $V^{\otimes m}=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{m\text{次}}$ 上，于是得到 G^m/H 的一个线性表示

$$\bar{\rho}:\ G^m/H\to GL(V^{\otimes m}).$$

由推论 3.8，$(\dim_C V)^m$ 是 $|G|^m/|H|$ 的一个因子，但是 $|H|=|Z(G)|^{m-1}$，因此对所有的正整数 m，有

$$(|G|/(|Z(G)|\dim_C V))^m\in\frac{1}{|Z(G)|}\mathbf{Z},$$

即 $\mathbf{Z}[|G|/(|Z(G)|\dim_C V)]\subseteq\frac{1}{|Z(G)|}\mathbf{Z}$. 由第一章定理 3.10，$|G|/(|Z(G)|\dim_C V)$ 是一个整数，即 $\dim_C V$ 是 $[G:Z(G)]$ 的一个因子. ▌

现在设 N 与 H 是 G 的子群，并且 N 是 G 的 Abel 正规子群，使得 $G=H\ltimes N$ 是 H 与 N 的半直积. 因为 N 是 Abel 群. 它的不可约线性表示的特征标都是 1 次的，它们生成一个群 $X=\mathrm{Hom}_C(N,\boldsymbol{C}^*)$. 群 G 通过

$$(x\cdot\chi)(y)=\chi(x^{-1}yx),\quad x\in G,y\in N,\chi\in X$$

作用在 X 上. 又设 $\{\chi_i\}_{i\in X/H}$ 是 X 中 H-轨道的代表元集，其中 X/H 是 X 中 H-轨道的集合，对每个 $i\in X/H$，设 H_i 是 χ_i 在 H 中的稳定子群. 再令 $G_i=H_i\ltimes N$ 是 G 的子群，τ 是 H_i 的一个 m 次不可约线性表示的特征标. 与定理 2.13 一样，我们可以证明 $\chi_i\otimes\tau$ 是 G_i 的一个 m 次不可约线性表示的特征标. 记 $\theta_{i,\tau}=\mathrm{Ind}_{G_i}^G(\chi_i\otimes\tau)$ 是 G 的相应的诱导表示的特征标，则有

命题 5.6 (1) $\theta_{i,\tau}$是 G 的不可约线性表示的特征标;

(2) 若 $\theta_{i,\tau}=\theta_{i',\tau'}$,则 $i=i'$ 且 $\tau=\tau'$;

(3) G 的每个不可约线性表示的特征标等于某个 $\theta_{i,\tau}$.

证明 由命题 5.2,只要对每个 $x\overline{\in} G_i$,作为 G_i 的子群 $K_x=G_i\cap xG_ix^{-1}$的线性表示的特征标,有

$$\left(\mathrm{Res}_{K_x}^{G_i}(\chi_i\otimes\tau),\mathrm{Res}_{K_x}^{G_i}(x\cdot(\chi_i\otimes\tau))\right)_{K_x}=0.$$

为此只要证明,限制于 K_x 的子群 N,有

$$\left(\mathrm{Res}_N^{G_i}(\chi_i\otimes\tau),\mathrm{Res}_N^{G_i}(x\cdot(\chi_i\otimes\tau))\right)_N=0.$$

注意到 $y\in N$ 时,

$$(\chi_i\otimes\tau)(y)=\chi_i(y)\tau(1)=m\chi_i(y),$$

$$(\chi_i\otimes\tau)(x^{-1}yx)=\chi_i(x^{-1}yx)\tau(1)=m(x\cdot\chi_i)(y),$$

并且 $x\cdot\chi_i\neq\chi_i$,容易计算

$$\begin{aligned}&\left(\mathrm{Res}_N^{G_i}(\chi_i\otimes\tau),\mathrm{Res}_N^{G_i}(x\cdot(\chi_i\otimes\tau))\right)_N\\&=\frac{1}{|N|}\sum_{y\in N}\overline{(\chi_i\otimes\tau)(y)}(\chi_i\otimes\tau)(x^{-1}yx)\\&=\frac{m^2}{|N|}\sum_{y\in N}\overline{\chi_i(y)}(x\cdot\chi_i)(y)\\&=m^2(\chi_i,x\cdot\chi_i)_N=0,\end{aligned}$$

这证明了(1). 为了证明(2),设 R 是双陪集空间 $N/G\backslash G_i$ 的代表元集,由定理 5.1,有

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_N^G\,\mathrm{Ind}_{G_i}^G(\chi_i\otimes\tau)&=\sum_{r\in R}\mathrm{Ind}_{N\cap rG_ir^{-1}}^N\mathrm{Res}_{N\cap rG_ir^{-1}}^{G_i}(r\cdot(\chi_i\otimes\tau))\\&=\sum_{r\in R}\mathrm{Res}_N^{G_i}(r\cdot(\chi_i\otimes\tau)),\end{aligned}$$

这里 $N\cap rG_ir^{-1}=N$. 于是 $\theta_{i,\tau}$限制于 N 只与 χ_i 的 H-轨道有关,证明了 $\theta_{i,\tau}$确定了 i. 进一步要证明 $\theta_{i,\tau}$确定了 τ:设 τ 所对应的$\boldsymbol{C}[H_i]$-模是 W,通过典范射影 π_i: $G_i\to G_i/N\cong H_i$,W 成为$\boldsymbol{C}[G_i]$-模. 又设 $\theta_{i,\tau}$所对应的 $\boldsymbol{C}[G]$-模是 V,如果我们把 $\theta_{i,\tau}$所对应的 G 的线性表示仍记为 $\theta_{i,\tau}$,χ_i 所对应的 N 的线性表示仍记为 χ_i,那么可以令

$$V_i=\{v\in V\,|\,\theta_{i,\tau}(y)(v)=m\chi_i(y)(v),y\in N\}.$$

对每个 $z\in H_i$，因为

$$\begin{aligned}\theta_{i,\tau}(y)(\theta_{i,\tau}(z)(v))&=\theta_{i,\tau}(yz)(v)=\theta_{i,\tau}(z)(\theta_{i,\tau}(z^{-1}yz)(v))\\&=\theta_{i,\tau}(z)(m\chi_i(z^{-1}yz)(v))=\theta_{i,\tau}(z)(m(z\cdot\chi_i)(y)(v))\\&=m\chi_i(y)(\theta_{i,\tau}(z)(v)),\end{aligned}$$

所以 V_i 是一个 $\boldsymbol{C}[H_i]$-模，从而也是一个 $\boldsymbol{C}[G_i]$-模. 只要证明作为 $\boldsymbol{C}[G_i]$-模 V_i 与 $\boldsymbol{C}\otimes W$ 同构，就证明了 $\theta_{i,\tau}$确定了 τ.

设 S 是左陪集空间 $G\backslash G_i$ 的代表元集，则

$$V=\bigoplus_{s\in S}\theta_{i,\tau}(s)(\boldsymbol{C}\otimes W)=\bigoplus_{s\in S}(\chi_i(s_1)\boldsymbol{C}\otimes\tau(s_2)W),$$

其中 $s=s_1s_2,s_1\in N,s_2\in H_i$. 注意到对于 $y\in N,w\in W$，有

$$\theta_{i,\tau}(y)(1\otimes w)=\chi_i(y)1\otimes\tau(1)w=m\chi_i(y)(1\otimes w);$$

对于 $s\in S,s\notin G_i$，有

$$\begin{aligned}&\theta_{i,\tau}(y)(\theta_{i,\tau}(s)(1\otimes w))\\&\quad=\theta_{i,\tau}(ys)(1\otimes W)=\theta_{i,\tau}(s)(\theta_{i,\tau}(s^{-1}ys)(1\otimes w))\\&\quad=\theta_{i,\tau}(s)((s\cdot\chi_i)(y)1\otimes\tau(1)w)\\&\quad=m((s\cdot\chi_i)(y))\theta_{i,\tau}(s)(1\otimes w),\end{aligned}$$

并且 $s\cdot\chi_i\neq\chi_i$，因此对所有的 $s\in S,s\notin G_i$，有 $\theta_{i,\tau}(s)(\boldsymbol{C}\otimes W)\cap V_i=\{0\}$，从而作为 $\boldsymbol{C}[G_i]$-模 V_i 与 $\boldsymbol{C}\otimes W$ 同构.

最后证明(3). 设 $\rho:G\to GL(V)$是 G 的不可约线性表示，由命题 5.3 的证明可以得到 $\mathrm{Res}_N^G V$ 的典范分解

$$\mathrm{Res}_N^G V=a(U_1\oplus\cdots\oplus U_k),\quad k\geqslant 1,$$

其中 $U_1,\cdots,U_k$ 是互不同构的单 $\boldsymbol{C}[N]$-模，它们在 G 的作用下互相共轭，因此它们的特征标在同一个 H-轨道 $H\chi_i$ 中，$i\in X/H$，于是 H_i 固定 χ_i. 不妨设 U_1 对应的特征标是 χ_i，于是 $aU_1=\underbrace{U_1\oplus\cdots\oplus U_1}_{a次}$成为一个 $\boldsymbol{C}[H_i]$-模，τ 是对应的 H_i 的线性表示的特征标，这样得到了 G_i 的不可约线性表示的特征标 $\chi_i\otimes\tau$，它在 $\mathrm{Res}_{G_i}^G\chi_\rho$ 中至少出现 1 次，其中 χ_ρ 是线性表示 ρ 的特征标. 现在由

定理 4.7,我们有

$$1 \geqslant (\theta_{i,\tau}, \chi_\rho)_G = (\chi_i \otimes \tau, \mathrm{Res}_{G_i}^G \chi_\rho)_{G_i} \geqslant 1,$$

迫使 $\chi_\rho = \theta_{i,\tau}$. ▌

下面我们举一些例子.

例 1 设 $\mathrm{Reg}_G: G \to GL(V)$ 是 G 的正则表示,它有一个基 $\{v_x \mid x \in G\}$. 又设 $H < G$ 是一个子群,令 W 是 $\{v_y \in V \mid y \in H\}$ 张成的 V 的子空间,$\mathrm{Reg}_H: H \to GL(W)$ 是 H 的正则表示,于是

$$\mathrm{Reg}_G = \mathrm{Ind}_H^G \mathrm{Reg}_H.$$

例 2 设 H 是群 G 的子群,S 是左陪集空间 $G \backslash H$ 的代表元集. 又设 V 是一个 $\boldsymbol{C}$-向量空间,它有一个基 $\{v_s \mid s \in S\}$. 对于任意的 $x \in G, s \in S$,若存在 $s' \in S$,使得 $xs \in s'H$,则记为 $x \cdot s = s'$. 通过 $\rho_x(v_s) = v_{x \cdot s}$,定义了 G 的线性表示 $\rho: G \to GL(V)$,于是 $V = \mathrm{Ind}_H^G(\boldsymbol{C}v_s)$ 是由 H 的单位表示诱导的,其中 $s \in S \cap H$.

例 3 计算二面体群 D_n 的特征标表.

回忆一下第一章 § 1 的例 2,二面体群 D_n 是由两个元素 a 与 b 生成的,它们满足下述关系式:

$$a^n = b^2 = 1, \quad bab = a^{-1}.$$

因为 $aa^ka^{-1} = a^k, ba^kb = a^{-k}, aba^ka^{-1} = ba^{k-2}$ 与 $bba^kb = ba^{-k}$,所以当 n 是偶数时,D_n 有 $\frac{n}{2} + 3$ 个共轭类:

$$\{1\}, \{a^{\frac{n}{2}}\}, \{a^i, a^{n-i}\} (i = 1, \cdots, n/2 - 1),$$
$$\{ba^{2k-1} \mid k = 1, \cdots, n/2\} \text{ 与 } \{ba^{2k} \mid k = 0, 1, \cdots, n/2 - 1\};$$

当 n 是奇数时,D_n 有 $\frac{n+3}{2}$ 个共轭类:

$$\{1\}, \quad \{a^i, a^{n-i}\} \left(i = 1, \cdots, \frac{n-1}{2} \right), \quad \{ba^k \mid k = 1, \cdots, n\}.$$

于是,当 n 是偶数时,D_n 有 $\frac{n}{2} + 3$ 个不可约线性表示;当 n 是奇数时,D_n 有 $\frac{n+3}{2}$ 个不可约线性表示.

首先考虑 D_n 的 1 次不可约线性表示的特征标. 因为 $a^n = b^2 =$

1，所以 $\chi(a)=\alpha$ 是 n 次单位根，$\chi(b)=\pm1$. 又因为 $(ab)^2=1$，$(\chi(ab))^2=(\pm\alpha)^2=\alpha^2=1$，所以 $\alpha=\pm1$，但是当 n 是奇数时，$\alpha\neq-1$，于是得到 D_n 的全部 1 次不可约特征标：

D_n 的 1 次不可约特征标

n 是偶数时

特征标 \ 代表元	a^k $(1\leqslant k\leqslant n)$	ba^k
χ_1	1	1
χ_2	1	-1
χ_3	$(-1)^k$	$(-1)^k$
χ_4	$(-1)^k$	$(-1)^{k+1}$

n 是奇数时

特征标 \ 代表元	a^k $(1\leqslant k\leqslant n)$	ba^k
χ_1	1	1
χ_2	1	-1

由于 D_n 有一个 Abel 正规子群 $C_n=\{a,a^2,\cdots,a^n=1\}$，由推论 5.4，$D_n$ 的不可约线性表示的次数只能是 1 次或 2 次的. 下面考虑 D_n 的 2 次不可约线性表示的特征标：由定理 4.4，我们有

$$\chi(x)=\frac{1}{n}\sum_{\substack{y\in D_n\\ yxy^{-1}\in C_n}}\chi_{C_n}(yxy^{-1}),\quad x\in D_n,$$

其中 χ_{C_n} 是循环群 C_n 的 1 次不可约特征标. 由于 C_n 有 n 个 1 次不可约线性表示，它们的特征标 $\chi_l(a)=\omega^l(l=0,1,\cdots,n-1)$，这里 $\omega=e^{\frac{2\pi i}{n}}$. 注意到 $D_n=C_n\cup bC_n$，容易计算

$$\begin{aligned}\chi^{(l)}(a^k)&=\chi_l(a^k)+\chi_l(ba^kb)\\&=\chi_l(a^k)+\chi_l(a^{-k})\\&=\omega^{kl}+\omega^{-kl},\quad 1\leqslant k\leqslant n;\end{aligned}$$

$$\chi^{(l)}(ba^k)=0,\quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

由于 $\chi^{(l)}=\chi^{(n-l)}$，n 是偶数时，有 $\frac{n}{2}+1$ 个不同的 2 次线性表示：$\chi^{(0)},\chi^{(1)},\cdots,\chi^{(\frac{n}{2})}$；$n$ 是奇数时，有 $\frac{n+1}{2}$ 个不同的 2 次线性表示：$\chi^{(0)},\chi^{(1)},\cdots,\chi^{(\frac{n-1}{2})}$. 为了判定这些特征标是否不可约，由定理 2.7，

我们必须计算$(\chi^{(l)},\chi^{(l)})_{D_n}$. 因为

$$\begin{aligned}(\chi^{(l)},\chi^{(l)})_{D_n}&=\frac{1}{2n}\sum_{x\in D_n}\overline{\chi^{(l)}(x)}\chi^{(l)}(x)\\&=\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}4\cos^2\frac{2kl\pi}{n}\\&=\begin{cases}1, & 0<l<\frac{n}{2},\\ 2, & l=0\text{ 或 }\frac{n}{2}\text{(仅当 }n\text{ 为偶数时)},\end{cases}\end{aligned}$$

并且$(\chi^{(0)},\chi_1)_{D_n}=(\chi^{(0)},\chi_2)_{D_n}=1$,当 n 是偶数时还有$(\chi^{(\frac{n}{2})},\chi_3)_{D_n}=(\chi^{(\frac{n}{2})},\chi_4)_{D_n}=1$,所以 $\chi^{(0)}=\chi_1+\chi_2$,$\chi^{(\frac{n}{2})}=\chi_3+\chi_4$. 这样得到 D_n 的全部 2 次不可约特征标:

D_n 的 2 次不可约特征标

特征标 \ 代表元	a^k $(1\leqslant k\leqslant n)$	ba^k $(1\leqslant k\leqslant n)$
$\chi^{(l)}$ $(0<l<n/2)$	$2\cos\frac{2kl\pi}{n}$	0

我们可以进一步把这些 2 次不可约特征标对应的线性表示用矩阵形式写出来. 设 $\rho^{(l)}: D_n\to GL(V)$是 $\chi^{(l)}$所对应的 2 次不可约线性表示,$0<l<\frac{n}{2}$,则 $V=W\oplus bW$,其中 W 是 C_n 的 1 次不可约线性表示的表示空间,对应的 C_n 的 1 次不可约特征标是 χ_l. 令 $W=Cv_1$,$v_2=bv_1$,则 $bW=Cv_2$. 由于 $av_1=\omega^l v_1$,$bv_1=v_2$,$av_2=abv_1=ba^{-1}v_1=\omega^{-l}bv_1=\omega^{-l}v_2$,$bv_2=b^2v_1=v_1$,我们有

$$\rho^{(l)}(a)=\begin{pmatrix}\omega^l & 0\\ 0 & \omega^{-l}\end{pmatrix},\quad \rho^{(l)}(b)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

例 4 计算群 D_{nh}的特征标表.

注意到 $D_{nh}=D_n\times I$ 是二面体群 D_n 与 2 阶群 $I=\{1,t\}$的直积,由定理 2.13,D_{nh}的不可约特征标都是 D_n 的不可约特征标与 I

的不可约特征标的张量积. 因为 I 只有两个 1 次不可约特征标:

特征标 \ 代表元	1	t
φ	1	1
ψ	1	-1

所以对 D_n 的每个不可约特征标 χ,恰好定义了 D_{nh}的两个不可约特征标 $\chi\otimes\varphi$ 与 $\chi\otimes\psi$:

特征标 \ 代表元	x	xt
$\chi\otimes\varphi$	$\chi(x)$	$\chi(x)$
$\chi\otimes\psi$	$\chi(x)$	$-\chi(x)$

其中 $x\in D_n$.

例 5 计算正六面体群的特征标表.

在 3 维实向量空间 $\boldsymbol{R}^3$ 中建立空间直角坐标系 O-XYZ,考虑其中由 8 个顶点 (x,y,z) $(x=\pm1, y=\pm1, z=\pm1)$所成的正六面体 C. 又设 G 是使 C 保持不变的 $\boldsymbol{R}^3$ 的自同构所成的群,它的元素置换了这 8 个顶点. 群 G 可以这样来描述:

(1) 群 G 包含了 3 个文字$\{x,y,z\}$的置换群 S_3 以及由 8 个变换

$$(x,y,z)\mapsto(\pm x,\pm y,\pm z)$$

组成的群 M,可以验证 $G=S_3\ltimes M$ 是正规子群 M 与子群 S_3 的半直积,我们把它作为练习留给读者.

(2) 令 ι 表示关于原点(0,0,0)的反射,即

$$\iota:\ (x,y,z)\mapsto(-x,-y,-z).$$

又令 T 是以$(1,1,1)$,$(1,-1,-1)$,$(-1,-1,1)$,$(-1,1,-1)$为顶点的四面体,$T'=\iota T$ 是以$(-1,-1,-1)$,$(-1,1,1)$,$(1,1,-1)$,$(1,-1,1)$为顶点的四面体,于是 C 的每个顶点或者是 T 的

或者是T'的一个顶点. 令$S(T)$是$\boldsymbol{R}^3$中使T保持不变的自同构所成的群,显然$S(T)=S_4$. 对于$\sigma\in S(T)$,$\sigma T'=\sigma\iota T=\iota\sigma T=\iota T=T'$,所以$\sigma$使$C$的顶点集保持不变,从而$S_4\subset G$,并且$G=S_4\times I$是$S_4$与群$I=\{1,\iota\}$的直积. 由定理2.13,$G$的不可约特征标都可以写成$S_4$的不可约特征标与$I$的不可约特征标的张量积. 根据§2的例3与前面的例4,对于S_4的每个不可约特征标χ,$\chi\otimes\varphi$与$\chi\otimes\psi$恰好是G的两个不可约特征标:

特征标 \ 代表元	σ	$\sigma\iota$
$\chi\otimes\varphi$	$\chi(\sigma)$	$\chi(\sigma)$
$\chi\otimes\psi$	$\chi(\sigma)$	$-\chi(\sigma)$

习　　题

1. 有限群G称为**亚循环群**,如果G有两个生成元a与b,满足下述关系式

$$a^m=1,\quad bab^{-1}=a^r,\quad b^s=a^t,$$

其中m,r,s,t是整数,使得$(m,r)=1$,$m\mid t(r-1)$,$m\mid(r^s-1)$. 试计算G的特征标表.

2. 设$F_3=\{0,1,-1\}$是3个元素的有限域. 试计算$G=GL(2,F_3)$的特征标表.

3. 试计算交错群A_5的特征标表.

4. 设k是有限域,$G=SL(2,k)$,H是所有上三角矩阵组成的子群,ω是乘法群k^*到$\boldsymbol{C}^*$的同态,χ_ω是H的1次不可约特征标,它由

$$\chi_\omega\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}=\omega(a)$$

定义. 证明:当$\omega^2\neq1$时,由χ_ω诱导的G的线性表示是不可约的.

5. 设G是一个p-群,V是特征p的域F上的向量空间,

$\rho: G \to GL(V)$是G的一个不可约线性表示,证明:$\dim_F V=1$.

6. 设G是一个幂零群,证明G的每个不可约线性表示都是由G的某个子群的1次线性表示诱导的. 我们把这种由子群的1次线性表示诱导的线性表示称为**单项表示**.

7. 命题5.3的(2)可以改进为:

(2)′ 或者存在G的真子群$H \supset N$以及单$C[H]$-模M使得$V=\mathrm{Ind}_H^G M$.

§6 Artin定理与Brauer定理

设H是群G的子群,ρ是群G的一个线性表示,限制于子群H得到H的一个线性表示$\mathrm{Res}_H^G \rho$,因此定义了表示环之间的环同态

$$\mathrm{Res}_H^G: R(G) \to R(H).$$

类似地,若θ是群H的一个线性表示,则诱导表示$\mathrm{Ind}_H^G \theta$是群G的一个线性表示,从而定义了表示环之间的一个Abel群同态

$$\mathrm{Ind}_H^G: R(H) \to R(G).$$

由于$\mathrm{Ind}_H^G(\theta \otimes \mathrm{Res}_H^G \rho)=(\mathrm{Ind}_H^G \theta)\otimes \rho$,同态$\mathrm{Ind}_H^G$的像是环$R(G)$中的一个理想. 而Frobenius互反性(定理4.7)

$$(\mathrm{Ind}_H^G \theta, \rho)_G=(\theta, \mathrm{Res}_H^G \rho)_H$$

恰好反映了这两个映射之间的一种伴随性质.

更一般地考虑G的一个子群族$\mathfrak{X}$,映射

$$\mathrm{Ind}: \bigoplus_{H \in \mathfrak{X}} R(H) \to R(G),$$

$$\{\xi_H \in R(H)\}_{H \in \mathfrak{X}} \to \sum_{H \in \mathfrak{X}} \mathrm{Ind}_H^G \xi_H$$

是环$\bigoplus_{H \in \mathfrak{X}} R(H)$到环$R(G)$内的Abel群同态,它的像同样是环$R(G)$中的一个理想. 如果$R(G)$的乘法恒等元(即单位表示的特征

标，记作 χ_1）在这个映射的像内，那么映射 Ind 是一个 Abel 群的满同态，这就是说 G 的每个线性表示的特征标都是子群族 $\mathfrak{X}$ 中的子群 H 的线性表示的诱导特征标的非负整系数线性组合. 我们希望确定怎样的子群族 $\mathfrak{X}$ 才能够使得 Ind 成为满同态，至少使得同态像 $\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}}R(H)\right)$ 在 $R(G)$ 中的指数有限. 这就是我们要在这一小节证明的两个重要定理：Artin 定理与 Brauer 定理.

定理6.1(Artin) 设 $\mathfrak{X}$ 是 G 的子群的族，对任意的 $H\in\mathfrak{X}$ 及 $x\in G$，有 $xHx^{-1}\in\mathfrak{X}$，则下述命题等价：

(1) $G=\bigcup_{H\in\mathfrak{X}}H$；

(2) 作为 Abel 群 $R(G)$ 的子群 $\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}}R(H)\right)$，它在 $R(G)$ 中指数有限，即 $\left[R(G):\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}}R(H)\right)\right]<\infty$；

(3) 对于 G 的每个线性表示的特征标 $\chi\in R(G)$，存在 $\chi_H\in R(H)$，$H\in\mathfrak{X}$ 及正整数 d，使得

$$d\chi=\sum_{H\in\mathfrak{X}}\mathrm{Ind}_H^G\chi_H.$$

证明 (2)与(3)的等价是显然的，我们把证明的细节作为练习留给读者.

(3)$\Longrightarrow$(1) 令 $S=\bigcup_{H\in\mathfrak{X}}H$. 对于任意的 $f_H\in R(H)$及 $H\in\mathfrak{X}$，有 $\mathrm{Ind}_H^G f_H(x)=\frac{1}{|H|}\sum_{y\in G}\dot{f}_H(yxy^{-1})$. 若存在 $x\in G-S$，则对所有的$y\in G$有 $yxy^{-1}\notin H$，从而 $\mathrm{Ind}_H^G f_H(x)=0$ 对所有的 $H\in\mathfrak{X}$ 及 $f_H\in R(H)$成立. 但是(3)告诉我们，对于 G 的每个线性表示的特征标 $\chi\in R(G)$，存在正整数 d 及 $\chi_H\in R(H)$，$H\in\mathfrak{X}$，使得

$$d\chi=\sum_{H\in\mathfrak{X}}\mathrm{Ind}_H^G\chi_H,$$

从而对于 $x\in G-S$，有 $\chi(x)=0$，特别有 $\chi_1(x)=0$，这是不可能的，因此 $S=G$.

(1)$\Longrightarrow$(3) 首先注意到下述事实：

(i) 设 $\mathfrak{X}$ 与 $\mathfrak{Y}$ 是群 G 的两个子群族. 若 $\mathfrak{X}\subset\mathfrak{Y}$, 则

$$\operatorname{Ind}\Big(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}}R(H)\Big)\subseteq\operatorname{Ind}\Big(\bigoplus_{H\in\mathfrak{Y}}R(H)\Big).$$

(ii) 设 $\mathfrak{X}$ 与 $\mathfrak{Y}$ 是群 G 的两个子群族. 若对于每个 $H\in\mathfrak{X}$, 都有 $H'\in\mathfrak{Y}$ 使得 $H<H'$, 则

$$\operatorname{Ind}\Big(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}}R(H)\Big)\subseteq\operatorname{Ind}\Big(\bigoplus_{H\in\mathfrak{Y}}R(H)\Big),$$

这是因为对于每个 $f\in R(H)$, 有 $\operatorname{Ind}_H^G f=\operatorname{Ind}_{H'}^G(\operatorname{Ind}_H^{H'}f)$.

(iii) 设 $\mathfrak{X}$ 是 G 中所有循环子群组成的子群族, 又设 $\mathfrak{Y}$ 是 G 的子群族使得 $G=\bigcup\limits_{H\in\mathfrak{Y}}H$, 那么对每个 $x\in G$ 都存在一个子群 $H\in\mathfrak{Y}$ 使得 $\langle x\rangle\subset H$, 因此(ii)成立.

基于上述事实, 为了证明(1)$\Longrightarrow$(3), 不妨假定 $\mathfrak{X}$ 是 G 中所有循环子群组成的子群族. 设 $C\in\mathfrak{X}$, 定义 C 上类函数

$$\theta_C(x)=\begin{cases}|C|, & \text{当 } x \text{ 生成 } C \text{ 时},\\ 0, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

于是对每个 $x\in G$ 有

$$\begin{aligned}\operatorname{Ind}_C^G\theta_C(x)&=\frac{1}{|C|}\sum_{\substack{y\in G\\ yxy^{-1}\in C}}\theta_C(yxy^{-1})\\ &=\frac{1}{|C|}\sum_{\substack{y\in G\\ yxy^{-1}\text{生成}C}}|C|=\sum_{\substack{y\in G\\ yxy^{-1}\text{生成}C}}1.\end{aligned}$$

并且对每个 $y\in G$, yxy^{-1} 生成 G 的唯一的一个循环子群, 因此对每个 $x\in G$ 有

$$\sum_{C\in\mathfrak{X}}\operatorname{Ind}_C^G\theta_C(x)=\sum_{y\in G}1=|G|,$$

从而

$$\sum_{C\in\mathfrak{X}}\operatorname{Ind}_C^G\theta_C=|G|$$

是 G 上常值函数.

现在我们只要证明 $\theta_C\in R(C)$, 于是就有

$$\mathrm{Ind}\Big(\bigoplus_{C\in\mathfrak{X}} R(C)\Big)\supseteq |G|R(G),$$

即

$$\Big[R(G):\mathrm{Ind}\Big(\bigoplus_{C\in\mathfrak{X}} R(C)\Big)\Big]\leqslant |G|<\infty.$$

我们对$|C|$作归纳法来证明 $\theta_C\in R(C)$. 由于

$$|C|=\sum_{B<C}\mathrm{Ind}_B^C\theta_B=\theta_C+\sum_{\substack{B<C\\B\neq C}}\mathrm{Ind}_B^C\theta_B,$$

由归纳假设，当 $B<C$ 且 $B\neq C$ 时，$\theta_B\in R(B)$，因此

$$\sum_{\substack{B<C\\B\neq C}}\mathrm{Ind}_B^C\theta_B\in R(C).$$

又因为$|C|\in R(C)$，所以 $\theta_C\in R(C)$. ▍

例 1 设$G=S_3$，取$\mathfrak{X}=\{H_1,H_2,H_3\}$，其中$H_1=\{(1)\}$，$H_2=\{(1),(1\ 2)\}$，$H_3=\{(1),(1\ 2\ 3),(1\ 3\ 2)\}$，则$G=\bigcup_{i=1}^{3}\bigcup_{x\in G} xH_ix^{-1}$. 如果我们把每个特征标在共轭类上的取值用行向量来表示，那么H_1只有1个1次特征标 $\chi_1^{(1)}=(1)$；H_2有2个1次特征标 $\chi_1^{(2)}=(1,1)$，$\chi_2^{(2)}=(1,-1)$；H_3有3个1次特征标 $\chi_1^{(3)}=(1,1,1)$，$\chi_2^{(3)}=(1,\omega,\omega^2)$，$\chi_3^{(3)}=(1,\omega^2,\omega)$，其中 $\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

现在考虑同态

$$\mathrm{Ind}:\bigoplus_{i=1}^{3}R(H_i)\to R(G).$$

由于

$$\xi_1=\mathrm{Ind}_{H_1}^G\chi_1^{(1)}=(6,0,0),$$

$$\xi_2=\mathrm{Ind}_{H_2}^G\chi_1^{(2)}=(3,1,0),$$

$$\xi_3=\mathrm{Ind}_{H_2}^G\chi_2^{(2)}=(3,-1,0),$$

$$\xi_4=\mathrm{Ind}_{H_3}^G\chi_1^{(3)}=(2,0,2),$$

$$\xi_5=\mathrm{Ind}_{H_3}^G\chi_2^{(3)}=\mathrm{Ind}_{H_3}^G\chi_3^{(3)}=(2,0,-1),$$

由 § 2例1有

$$\xi_1 = \chi_{\rho_0} + \chi_{\rho_s} + 2\chi_\tau,$$
$$\xi_2 = \chi_{\rho_0} + \chi_\tau,$$
$$\xi_3 = \chi_{\rho_s} + \chi_\tau,$$
$$\xi_4 = \chi_{\rho_0} + \chi_{\rho_s},$$
$$\xi_5 = \chi_\tau,$$

因此$\{\chi_{\rho_0},\chi_{\rho_s},\chi_\tau\}$也是$\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{i=1}^{3}R(H_i)\right)$的基,从而

$$\left[R(G):\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{i=1}^{3}R(H_i)\right)\right]=1.$$

如果我们考虑G在有理数域$\boldsymbol{Q}$上的线性表示,那么H_3只有1个1次特征标$\chi_1^{(3)}$及1个2次特征标$\chi_2^{(3)}+\chi_3^{(3)}=(2,-1,-1)$,并且$\xi_5=\mathrm{Ind}_{H_3}^G(\chi_2^{(3)}+\chi_3^{(3)})=(4,0,-2)=2\chi_\tau$.这时,同态

$$\mathrm{Ind}_{\boldsymbol{Q}}:\bigoplus_{i=1}^{3}R_{\boldsymbol{Q}}(H_i)\to R_{\boldsymbol{Q}}(G)=R(G)$$

的像$\mathrm{Ind}_{\boldsymbol{Q}}\left(\bigoplus_{i=1}^{3}R_{\boldsymbol{Q}}(H_i)\right)$的基由$\{\chi_{\rho_0}+\chi_{\rho_s},\chi_{\rho_s}+\chi_\tau,2\chi_\tau\}$组成,而$R_{\boldsymbol{Q}}(G)$的基由$\{\chi_{\rho_0}+\chi_{\rho_s},\chi_{\rho_s}+\chi_\tau,\chi_\tau\}$组成,所以

$$\left[R_{\boldsymbol{Q}}(G):\mathrm{Ind}_{\boldsymbol{Q}}\left(\bigoplus_{i=1}^{3}R_{\boldsymbol{Q}}(H_i)\right)\right]=2.$$

为了证明 Brauer 定理,我们必须先做一些准备工作.

定义6.2 若$x\in G$的阶是素数p的幂,则称x为G的**p-元素**或**p-幂幺元素**.若$x\in G$的阶与p互素,则称x为G的**p'-元素**或**p-正则元素**.

显然G中每个元素x都可以唯一地写成$x=x_ux_r=x_rx_u$,其中x_u是一个p-元素,x_r是一个p'-元素,并把x_u称为x的**p-分支**,x_r称为x的**p'-分支**.

定义6.3 若G的子群H是一个阶与p互素的循环群C与一个p-群P的直积,即$H=C\times P=CP$,则称H是一个**p-初等子群**.G的所有p-初等子群所成的子群族记为$\mathfrak{X}_p$,并且记

$$\mathfrak{X}_0 = \bigcup_p \mathfrak{X}_p,$$

其中 p 取遍所有素数. 这时,子群族 $\mathfrak{X}_0$中的每个子群称为 G 的**初等子群**.

设 $x \in G$ 是一个 p'-元素,$C = \langle x \rangle$是由 x 生成的循环子群,$Z_G(x)$是 x 的中心化子,P 是 $Z_G(x)$的 Sylow p-子群,则 $H = CP$ 是一个 p-初等子群,称为与 x 相伴的 p-初等子群,它们显然在 $Z_G(x)$内互相共轭. 现在我们可以叙述并证明 Brauer 定理了.

定理 6.4(Brauer) G 的每一个线性表示的特征标都是 G 的初等子群的线性表示的诱导特征标的整系数线性组合,即

$$\mathrm{Ind}\Big(\bigoplus_{H \in \mathfrak{X}_0} R(H)\Big) = R(G). \quad \blacksquare$$

显然 Brauer 定理比 Artin 定理更加深刻地揭示了群 G 的线性表示与 G 的子群的线性表示之间的关系,因为 Artin 定理只告诉我们 G 的线性表示的特征标都是 G 的循环子群的线性表示的诱导特征标的有理系数线性组合. 并且,Brauer 定理的逆定理也是成立的,即

定理 6.5(Green) 设 $\mathfrak{X}$ 是 G 的一个子群族,它包含其中每个子群的共轭子群. 若 $R(G) = \mathrm{Ind}\Big(\bigoplus_{H \in \mathfrak{X}} R(H)\Big)$,则 $\mathfrak{X}_0 \subset \mathfrak{X}$. $\blacksquare$

由此可见,$\mathfrak{X}_0$是使 Ind 成为满同态的最小子群族. 我们只证明 Brauer 定理,它的逆定理就不在这里证明了. 有兴趣的读者可以参考[S].

如果我们证明了下面的

命题 6.6 设$|G| = p^m l$,$(p,l)=1$,其中 p 是素数,则

$$l \in \mathrm{Ind}\Big(\bigoplus_{H \in \mathfrak{X}_p} R(H)\Big) = V_p,$$

那么 Brauer 定理就很容易证明了.

定理6.4的证明 因为 $\mathfrak{X}_0 = \bigcup\limits_p \mathfrak{X}_p$,所以

$$\Big[R(G) : \mathrm{Ind}\Big(\bigoplus_{H \in \mathfrak{X}_0} R(H)\Big)\Big]$$

能够整除 $[R(G): V_p]$. 由命题 6.6, $[R(G): V_p]$ 与 p 互素, 因此 $[R(G): \operatorname{Ind}(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}_0} R(H))]$ 与每个素数 p 互素, 迫使

$$R(G) = \operatorname{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}_0} R(H)\right). \quad \blacksquare$$

现在要证明命题 6.6, 首先用几个引理来考察 G 上整值类函数的性质.

设 ϵ 是 $\boldsymbol{C}$ 中 $|G|$ 次本原单位根, $A=\boldsymbol{Z}[\epsilon]$ 是分圆域 $\boldsymbol{Q}(\epsilon)$ 中代数整数环. 考虑 A-线性映射

$$A \otimes \operatorname{Ind}: \bigoplus_{H\in\mathfrak{X}_p} A \otimes_{\boldsymbol{Z}} R(H) \to A \otimes_{\boldsymbol{Z}} R(G),$$

由于 $R(G)\cong \boldsymbol{Z}\otimes_{\boldsymbol{Z}} R(G)$ 是 $A\otimes_{\boldsymbol{Z}} R(G)$ 的子环, A 作为 $\boldsymbol{Z}$-模是有限生成的, 它有一个基 $\{\epsilon, \epsilon^2, \cdots, \epsilon^{\varphi(|G|)}\}$, 其中 φ 是 Euler φ-函数, 即对每个正整数 n, $\varphi(n)$ 等于使 $1\leqslant i\leqslant n$ 且 $(i,n)=1$ 的整数 i 的个数. 因此

$$\left(A \otimes_{\boldsymbol{Z}} \operatorname{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}_p} R(H)\right)\right) \cap R(G) = \operatorname{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}_p} R(H)\right).$$

引理 6.7 如果 G 上整值类函数 f 可以被 $|G|$ 所整除, 即对于每个 $x\in G$, $|G| \,\big|\, f(x)$, 那么 $f\in A\otimes_{\boldsymbol{Z}} \operatorname{Ind}\left(\bigoplus_{C\in\mathfrak{X}} R(C)\right)$, 其中 $\mathfrak{X}$ 是 G 中所有循环子群组成的子群族.

证明 整值类函数 f 可以写成 $f=|G|\chi$, 其中 χ 是 G 上整值类函数. 由 Artin 定理的证明, 有

$$|G| = \sum_{C\in\mathfrak{X}} \operatorname{Ind}_C^G \theta_C,$$

从而

$$f=|G|\chi=\sum_{C\in\mathfrak{X}} (\operatorname{Ind}_C^G \theta_C)\chi=\sum_{C\in\mathfrak{X}} \operatorname{Ind}_C^G(\theta_C \operatorname{Res}_C^G \chi).$$

于是只要证明 $\theta_C \operatorname{Res}_C^G\chi\in A\otimes_{\boldsymbol{Z}} R(C)$ 对每个 $C\in\mathfrak{X}$ 成立. 但是, 对 C 的每个不可约特征标 χ_C 有

$$(\theta_C \operatorname{Res}_C^G\chi, \chi_C)=\frac{1}{|C|}\sum_{x\in C} \overline{\theta_C(x)\operatorname{Res}_C^G\chi(x)}\chi_C(x)\in A,$$

这是因为 $\chi(x)\in\mathbf{Z}$,$\chi_C(x)\in A$ 及 $\frac{1}{|C|}\theta_C(x)=0$ 或 1 的缘故，因此 $\theta_C\mathrm{Res}_C^G\chi\in A\otimes_{\mathbf{Z}}R(C)$. ▌

引理 6.8 设 $\chi\in A\otimes_{\mathbf{Z}}R(G)$是一个整值元素，则对每个 $x\in G$,有 $\chi(x)\equiv\chi(x_r)(\mathrm{mod}\ p)$,这里 x_r 是 x 的 p'-分支.

证明 设 $C=\langle x\rangle$,因为 $\mathrm{Res}_C^G\chi\in A\otimes_{\mathbf{Z}}R(C)$仍是一个整值元素，所以我们可以假定 $G=\langle x\rangle$是循环群. 若 x 的阶为 $n=p^a s$,其中 p 是素数且$(p,s)=1$,则存在整数 u,v 使得 $up^a+vs=1$,于是 $x=x^{up^a}x^{vs}=x_r x_u$,$x_r=x^{up^a}$,并且当 q 是 p 的足够大的幂时，有 $x^q=x_r^q$.

设 $\chi_1,\cdots,\chi_n$ 是 G 的 1 次不可约特征标，则 $\chi=\sum_{i=1}^n a_i\chi_i$,$a_1,\cdots,a_n\in A$,并且有 $\chi_i(x)^q=\chi_i(x_r)^q\quad(1\leqslant i\leqslant n)$. 于是

$$(\chi(x))^q=\left(\sum_{i=1}^n a_i\chi_i(x)\right)^q\equiv\sum_{i=1}^n a_i^q\chi_i(x)^q(\mathrm{mod}\ pA)$$

$$\equiv\sum_{i=1}^n a_i^q\chi_i(x_r)^q(\mathrm{mod}\ pA)\equiv(\chi(x_r))^q(\mathrm{mod}\ pA).$$

由于 $pA\cap\mathbf{Z}=p\mathbf{Z}$,上式的两端都是整数，因此

$$(\chi(x))^q\equiv(\chi(x_r))^q(\mathrm{mod}\ p).$$

又由 Euler 定理，对每个整数 $a\in\mathbf{Z}$,有

$$a^q\equiv a(\mathrm{mod}\ p),$$

因此

$$\chi(x)\equiv\chi(x_r)(\mathrm{mod}\ p).\quad ▌$$

引理 6.9 设 $x\in G$ 是一个 p'-元素，H 是与 x 相伴的 p-初等子群，则存在 H 上整值类函数 $\psi\in A\otimes_{\mathbf{Z}}R(H)$使得 $\mathrm{Ind}_H^G\psi$ 具有下述性质：

(1) $\mathrm{Ind}_H^G\psi(x)\not\equiv0(\mathrm{mod}\ p)$;

(2) 对每个不与 x 共轭的 p'-元素 $y\in G$,$\mathrm{Ind}_H^G\psi(y)=0$.

证明 设 $H=CP$,$C=\langle x\rangle$是由 x 生成的循环子群，P 是 x 在 G 内的中心化子 $Z_G(x)$的 Sylow p-子群，记 P 的阶为 p^a. 令 ψ_C 是

C 上的类函数，它由

$$\psi_C(x)=|C| \text{ 及 } \psi_C(y)=0, \quad y\neq x$$

定义. 于是 $\psi_C=\sum_{\chi}\overline{\chi(x)}\chi$，这里 χ 取遍 C 的全部 1 次不可约特征标，因此 $\psi_C\in A\otimes_{\mathbf{Z}}R(C)$. 进一步定义 H 上的函数

$$\psi(yz)=\psi_C(y), \quad y\in C, z\in P.$$

于是 ψ 是 H 上整值类函数且 $\psi\in A\otimes_{\mathbf{Z}}R(H)$. 因为在

$$\mathrm{Ind}_H^G\,\psi(y)=\frac{1}{|H|}\sum_{\substack{z\in G\\ zyz^{-1}\in H}}\psi(zyz^{-1})$$

中，如果 y 是 G 的一个 p'-元素，那么 zyz^{-1} 也是一个 p'-元素；如果 $zyz^{-1}\in H$，那么 $zyz^{-1}\in C$. 所以当 $zyz^{-1}\neq x$ 时，有 $\psi(zyz^{-1})=\psi_C(zyz^{-1})=0$，即对于每个不与 x 共轭的 p'-元素 $y\in G$，$\mathrm{Ind}_H^G\psi(y)=0$，从而(2)成立. 又因为

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}_H^G\psi(x)&=\frac{1}{|H|}\sum_{\substack{z\in G\\ zxz^{-1}\in H}}\psi(zxz^{-1})=\frac{1}{|C|p^a}\sum_{\substack{z\in G\\ zxz^{-1}\in H}}\psi_C(zxz^{-1})\\&=\frac{1}{|C|p^a}\sum_{\substack{z\in G\\ zxz^{-1}=x}}|C|=\frac{1}{p^a}\sum_{\substack{z\in G\\ zxz^{-1}=x}}1\\&=\frac{1}{p^a}|Z_G(x)|=b\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p),\end{aligned}$$

其中 $|Z_G(x)|=p^ab$，$(p,b)=1$，所以(1)成立. ▌

引理 6.10 存在 G 上整值类函数 $f\in A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}_p}R(H)\right)$，使得 $f(x)\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$ 对每个 $x\in G$ 成立.

证明 设 $\{x_i\}_{i\in I}$ 是 G 中 p'-元素的共轭类的代表元集，H_i 是与 x_i 相伴的 p-初等子群，由上述引理，存在 H_i 上整值类函数 $\psi_i\in A\otimes_{\mathbf{Z}}R(H_i)$，使得 $\mathrm{Ind}_{H_i}^G\psi_i(x_i)\not\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$，而对所有的 $j\neq i$，$\mathrm{Ind}_{H_i}^G\psi_i(x_j)=0$. 取 $f=\sum_{i\in I}\mathrm{Ind}_{H_i}^G\psi_i\in A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}_p}R(H)\right)$，由引理 6.8，对每个 $x\in G$，存在某个 $j\in I$ 使得 $f(x)\equiv f(x_j)(\mathrm{mod}\ p)$. 但

是 $f(x_j)=\sum_{i\in I}\mathrm{Ind}_{H_i}^G\psi_i(x_j)=\mathrm{Ind}_{H_j}^G\psi_j(x_j)\not\equiv 0 \pmod p$，因此对每个 $x\in G$，$f(x)\not\equiv 0 \pmod p$． ▌

现在可以证明命题 6.6 了．

命题 6.6 的证明 取整值类函数 $f\in A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}_p}R(H)\right)$ 使得 $f(x)\not\equiv 0 \pmod p$ 对所有的 $x\in G$ 成立．令 $N=\varphi(p^m)=p^{m-1}(p-1)$，其中 φ 是 Euler φ-函数，由 Euler 定理，$f(x)^N\equiv 1 \pmod{p^m}$，从而 $l(f^N-1)$ 满足引理 6.7 的条件，因此

$$l(f^N-1)\in A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{C\in\mathfrak{X}}R(C)\right)\subseteq A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}_p}R(H)\right).$$

由于 $A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}_p}R(H)\right)$ 是 $A\otimes_{\mathbf{Z}}R(G)$ 的一个理想，$lf^N\in A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}_p}R(H)\right)$，因此 $l\in\left(A\otimes_{\mathbf{Z}}\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}_p}R(H)\right)\right)\cap R(G)$ $=\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}_p}R(H)\right)=V_p$． ▌

由本节习题 1，每个初等子群是幂零群，又由 §5 习题 6，幂零群的每个线性表示都是单项表示，因此有

推论 6.11 群 G 的每个线性表示的特征标都是单项表示的特征标的整系数线性组合． ▌

习　　题

1．证明有限群 G 的每个初等子群是幂零群．

2．设 $x\in G$ 是群 G 的一个元素，p 是素数，证明 x 可以唯一地写成一个 p-元素与一个 p'-元素的乘积 $x=x_rx_u=x_ux_r$．

3．设 $G=A_4$，$\mathfrak{X}$ 是 G 的循环子群所成的子群族．又设 $\{\chi_1,\chi_2,\chi_3,\chi_4\}$ 是 G 的不可约特征标的集合（见 §2 例 3）．证明 $\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}}R^+(H)\right)$ 的像是由 $\{\chi_1+\chi_2+\chi_3+\chi_4, 2\chi_4, \chi_1+\chi_4, \chi_2+\chi_4, \chi_3+\chi_4\}$ 生成的，因此 $\chi\in\mathrm{Ind}\left(\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}}R(H)\right)$ 当且仅当 $\chi(1)\equiv 0 \pmod 2$，并且 χ_1,χ_2 与 χ_3 都不能够写成循环子群的线性表示的诱导特

征标的正有理系数线性组合.

4. 设 N 是同态

$$\mathbf{Q}\otimes\mathrm{Ind}:\bigoplus_{H\in\mathfrak{X}}\mathbf{Q}\otimes R(H)\to\mathbf{Q}\otimes R(G)$$

的核.

(1) 设 $H,H'\in\mathfrak{X}$ 且 $H'\subset H$，又设 $\chi'\in R(H')$，$\chi=\mathrm{Ind}_{H'}^{H}(\chi')\in R(H)$，证明 $\chi-\chi'\in N$；

(2) 设 $H\in\mathfrak{X}$，$x\in G$，令 ${}^{x}H=xHx^{-1}$. 又设 $\chi\in R(H)$，${}^{x}\chi\in R({}^{x}H)$ 由 ${}^{x}\chi(xhx^{-1})=\chi(h)(h\in H)$ 定义. 证明 $\chi-{}^{x}\chi\in N$；

(3) 证明 N 在 $\mathbf{Q}$ 上由上述(1)与(2)两种类型的元素生成.

5. 设 C 是 n 阶循环群，令 $\lambda_C=\varphi(n)\mathrm{reg}_C-\theta_C$，其中 $\varphi(n)$ 是 Euler φ-函数，reg_C 是 C 的正则表示的特征标，θ_C 如同定理 6.1 一样定义. 证明

(1) λ_C 是 C 的一个与单位特征标正交的特征标；

(2) 设 reg_G 是 G 的正则表示的特征标，$\mathfrak{X}$ 是 G 中所有循环子群的子群族，χ_1 是 G 的单位表示的特征标，则

$$\sum_{C\in\mathfrak{X}}\mathrm{Ind}_C^G(\lambda_C)=|G|(\mathrm{reg}_G-\chi_1).$$

6. 设 $H=CP$ 是群 G 的一个 p-初等子群，又设 x 是循环群 C 的一个生成元，证明 H 含在与 x 相伴的 p-初等子群 H' 中.

7. 设 χ 是群 G 的不可约特征标.

(1) 如果 χ 是单项特征标的正实系数线性组合，那么存在整数 $m\geq 1$ 使得 $m\chi$ 是单项特征标.

(2) 当 $G=A_5$，χ 是 G 的 4 次不可约线性表示的特征标使得这个不可约线性表示与单位表示的直和是 G 的置换表示. 证明：如果 $m\chi$ 是由子群 H 的 1 次特征标诱导的特征标，那么 H 的阶等于 $\frac{15}{m}$，其中 m 只可能取值 1,3,5,15. 并且 χ 限制于 H 包含一个 1 次特征标 m 次，从而 χ 不是单项特征标的正实系数线性组合.

第三章 有限群的模表示

我们已经讨论了有限群在复数域上的表示理论，当素数 p 是群 G 的阶的一个因子时，用特征 p 的数域来代替复数域，由于完全可约性定理不再成立，对应的群代数不再是半单代数，群 G 的表示理论发生了本质的改变，这就是由 Brauer 所创立的有限群的模表示理论所要研究的. 在这一章我们将介绍模表示论的概貌，有兴趣的读者可以进一步参考[B]，[CR1]，[CR2]，[CR3]，[DM]，[F]，[FH]或[S]等. 本章所涉及的群都是有限群，不再一一赘述.

§1 基本概念

设(K,A,k)是一个 p-模系统，当素数 p 整除 G 的阶时，群代数 $k[G]$不再是一个半单代数，但是它的左理想满足降链条件，从而每个有限生成 $k[G]$-模有合成列，也有射影包(证明可在[CR2, 41, p. 132 及 p. 406]中找到). 除了考虑有限生成 $k[G]$-模范畴的 Grothendieck 群 $R_k(G)$外，我们还要考虑有限生成射影 $k[G]$-模范畴的 Grothendieck 群 $P_k(G)$.

设 S_k 是单 $k[G]$-模(即 G 在数域 k 上的不可约线性表示)的同构类的代表元集合，对每个 $E\in S_k$，P_E 是 E 的射影包. 可以证明它是一个**射影不可分解 $k[G]$-模**.

命题 1.1 (1) 每个有限生成 $k[G]$-模 M 有一个射影包；

(2) 若 P 是 M 的射影包，Q 是 N 的射影包，则 $P\oplus Q$ 是 $M\oplus N$的射影包；

(3) 若 P 是射影 $k[G]$-模，E 是 P 的最大半单商模，则 P 是 E 的射影包.

证明 (1) 由于每个有限生成 $k[G]$-模是自由模的商模，M 可以写成 L/R 的形式，其中 L 是射影 $k[G]$-模，R 是 L 的子模. 对于 R 的子模 N，考虑典范同态

$$\pi_N : L/N \to L/R = M.$$

由于 $k[G]$-左理想满足降链条件，每个有限生成 $k[G]$-模的非空集合有极小元素. 因为 π_R 是一个本质同态，所以在 R 中有极小子模 N 使得 π_N 是本质同态，记 $L/N=P$. 设 Q 是 L 的子模，使 Q 是非空集合 $\{Q\subset L \mid \pi : L\to L/N=P$ 限制于 Q 仍是满同态$\}$中的极小元素. 因为 L 是射影模，存在 $q : L\to Q$ 使得下图

$$\begin{array}{ccccc} & & L & & \\ & \swarrow^{q} & \downarrow \pi & & \\ L/N'=Q & \xrightarrow{\pi|_Q} & L/N=P & \xrightarrow{\pi_N} & L/R=M \end{array}$$

是交换图，即 $\pi=\pi|_Q \circ q$. 由 Q 的极小性可知 q 是一个满同态，记 $N'=\mathrm{Ker}q$，则有 $Q=L/N'$. 因为 π_N 与 $\pi|_Q$ 都是本质同态，所以 $\pi_{N'}=\pi_N \circ \pi|_Q$ 仍是本质同态. 但是 $N'\subset N$，N 的极小性迫使 $N'=N$，因此 $Q\cong P$. 由第一章定理 3.2(3)，P 是射影模，从而是 M 的射影包.

第一章命题 3.3 还告诉我们，在同构意义下 M 的射影包 P 是唯一的.

(2) 因为 $P \twoheadrightarrow M$ 与 $Q \twoheadrightarrow N$ 是本质同态时，$P\oplus Q \twoheadrightarrow M\oplus N$ 也是本质同态，并且 $P\oplus Q$ 是射影 $k[G]$-模，所以 $P\oplus Q$ 是 $M\oplus N$ 的射影包.

(3) 设 E 是射影 $k[G]$-模 P 的极大半单商模，考虑满同态 $f: P\twoheadrightarrow E$，令 P' 是 P 的子模的非空集合 $\{P'\subset P \mid P'$ 是射影模且 $f(P')=E\}$中的极小元素，我们要证明 $P'=P$. 设若不然，由本章

§1 习题 1 及第一章 §3 习题 3 中的(4),有 $P=P'\oplus Q$,Q 也是射影模. 于是存在单 $k[G]$-模 E' 使得 E' 是 Q 的单商模,并且 $E\oplus E'$ 是 $P'\oplus Q=P$ 的半单商模,这与 E 的极大性矛盾. ▍

推论 1.2 每个有限生成的射影 $k[G]$-模是射影不可分解 $k[G]$-模的直和,并且在同构意义下这个分解是唯一的.

证明 先证明每个单 $k[G]$-模 E 的射影包 P_E 是不可分解的. 设若不然,P_E 可以写成两个非平凡的真子模的直和,即 $P_E=P\oplus Q$,则 P 与 Q 都是射影 $k[G]$-模. 如果 M 与 N 分别是它们的最大半单商模,由命题 1.1,$P\oplus Q$ 是 $M\oplus N$ 的射影包,因此必须有 $E\cong M\oplus N$. 于是或者 $E\cong M$,$N=0$,或者 $M=0$,$E\cong N$,从而或者 $P_E\cong P$,$Q=0$,或者 $P=0$,$P_E\cong Q$. 这是一个矛盾.

现在设 P 是一个有限生成的射影 $k[G]$-模,E 是 P 的极大半单商模,则 E 可以唯一地分解为单 $k[G]$-模的直和

$$E=E_1\oplus\cdots\oplus E_r.$$

又设 $P_{E_1},\cdots,P_{E_r}$ 分别是 $E_1,\cdots,E_r$ 的射影包,由命题 1.1,P 与 $P_{E_1}\oplus\cdots\oplus P_{E_r}$ 都是 E 的射影包. 又由第一章命题 3.3,

$$P\cong P_{E_1}\oplus\cdots\oplus P_{E_r},$$

即 P 可以分解为射影不可分解 $k[G]$-模的直和. 我们把证明这个分解的唯一性作为练习留给读者. ▍

推论 1.3 $\{[P_E]\mid E\in S_k\}$ 是 $P_k(G)$ 的基.

证明 用推论 1.2. ▍

推论 1.4 若 $[P]=\sum_{E\in S_k}n_E[P_E]$,其中每个 n_E 是非负整数,则作为 $k[G]$-模 $P\cong\bigoplus_{E\in S_k}(P_E)^{n_E}$,这里 $(P_E)^{n_E}=\underbrace{P_E\oplus\cdots\oplus P_E}_{n_E次}$.

证明 用推论 1.2. ▍

我们还可以证明 $P_k(G)$ 具有 $R_k(G)$ 模的结构,为此先证明引理1.5.

引理 1.5 设 Λ 是交换环,P 是 $\Lambda[G]$-模,则 P 是射影 $\Lambda[G]$-

模的充分必要条件是 P 是射影 Λ-模且存在 P 的 Λ-模自同态 u 使得

$$\sum_{x\in G} xu(x^{-1}v)=v,\quad v\in P.$$

证明 因为 $\Lambda[G]$是自由 Λ-模，所以当 P 是射影 $\Lambda[G]$-模时，P 也是射影 Λ-模. 反之，若 P 作为 Λ-模是射影模 P_0，令 $Q=\Lambda[G]\otimes_\Lambda P_0$，这是一个射影 $\Lambda[G]$-模. 现在，恒等映射 $P_0\to P$ 扩充为$\Lambda[G]$-满同态$q:\ Q\longrightarrow P$，由第一章命题 3.2 中(3)，P 是射影 $\Lambda[G]$-模当且仅当存在 $\Lambda[G]$-满同态 $p:\ P\longrightarrow Q$ 使得 $q\circ p=1_P$. 对每个 $v\in P$，有 $p(v)=\sum_{x\in G} x\otimes u_x(v)$，其中 $u_x(v)\in P_0$. 又对每个 $y\in G$，有 $yp(v)=p(yv)$，从而

$$\sum_{x\in G} yx\otimes u_x(v)=\sum_{x\in G} x\otimes u_x(yv),$$

因此 $u_x(yv)=u_{y^{-1}x}(v)$. 于是存在 $u\in \mathrm{End}_\Lambda(P_0)$，满足$u(x^{-1}v)=u_x(v)$，从而 $u_x(yv)=u(x^{-1}yv)=u_{y^{-1}x}(v)$，因此 $q\circ p=1_P$ 当且仅当对每个 $v\in P$ 有

$$\sum_{x\in G} xu(x^{-1}v)=v. \quad ▌$$

用这个引理就可以证明下面的命题 1.6.

命题 1.6 设 M 是 $k[G]$-模，P 是射影 $k[G]$-模，则 $M\otimes_k P$ 是射影 $k[G]$-模.

证明 作为 k-向量空间，$M\otimes_k P$ 是射影 k-模. 因为 P 是射影 $k[G]$-模，所以存在 $u\in \mathrm{End}_k(P)$ 使 $\sum_{x\in G} xu(x^{-1}v)=v$ 对每个 $v\in P$成立. 现在取 $1_M\otimes u\in \mathrm{End}_k(M\otimes_k P)$，对所有 $m\in M$ 和 $v\in P$有

$$\sum_{x\in G} x(1_M\otimes u)(x^{-1}(m\otimes v))$$
$$=\sum_{x\in G} m\otimes xu(x^{-1}v)=m\otimes v,$$

因此 $M\otimes_k P$ 是射影 $k[G]$-模. ▌

我们还要考虑有限生成射影 $A[G]$-模范畴的 Grothendieck

群 $P_A(G)$. 为了弄清楚 $P_A(G)$的结构，我们先要证明一个引理.

引理 1.7 设 Λ 是局部环，$\mathfrak{m}_\Lambda$ 是 Λ 的唯一的极大理想，$k_\Lambda=\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda$ 是剩余类域.

(1) 设 P 是 Λ-自由的 $\Lambda[G]$-模，则 P 是射影 $\Lambda[G]$-模当且仅当 $\bar{P}=P\otimes_\Lambda k_\Lambda$ 是射影 $k_\Lambda[G]$-模；

(2) 两个射影 $\Lambda[G]$-模 P 和 P' 同构当且仅当相应的 $k_\Lambda[G]$-模 $\bar{P}$ 和 $\bar{P}'$ 同构.

证明 (1) 显然，当 P 是射影 $\Lambda[G]$-模时，$\bar{P}$ 是射影 $k_\Lambda[G]$-模. 反之，当 $\bar{P}$ 是射影 $k_\Lambda[G]$-模时，存在 $\bar{u}\in \mathrm{End}_{k_\Lambda}(\bar{P})$使得

$$\sum_{x\in G} x\bar{u}x^{-1}=1_{\bar{P}}.$$

于是得到 $u\in \mathrm{End}_\Lambda(P)$使得

$$\sum_{x\in G} xux^{-1}\equiv 1_P(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_\Lambda P).$$

令 $u'=\sum_{x\in G} xux^{-1}\in \mathrm{End}_\Lambda(P)$，对任意的 $y\in G$ 有 $yu'y^{-1}=\sum_{x\in G} yxux^{-1}y^{-1}=u'$. 因为 $u'\equiv 1_P(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_\Lambda P)$，$P=u'(P)+\mathfrak{m}_\Lambda P$，由 Nakayama 引理，$P=u'(P)$，$u'$是 P 的 Λ-模自同构，所以 u'^{-1}存在. 于是$\sum_{x\in G} x(uu'^{-1})x^{-1}=\sum_{x\in G}(xux^{-1})u'^{-1}=u'u'^{-1}=1_P$，这证明了 P 是射影 $\Lambda[G]$-模.

(2) 显然，当 P 和 P'是同构的射影 $\Lambda[G]$-模时，$\bar{P}$ 和 $\bar{P}'$是同构的射影 $k_\Lambda[G]$-模. 反之，设 $\bar{w}: \bar{P}\to\bar{P}'$是射影 $k_\Lambda[G]$-模的同构，由(1)，P 和 P'是射影 $\Lambda[G]$-模. 于是存在 $w: P\to P'$使得下图

$$\begin{array}{ccc} P & \overset{w}{\dashrightarrow} & P' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{P} & \xrightarrow{\bar{w}} & \bar{P}' \end{array}$$

是交换图. 因为 $P'=\mathfrak{m}P'+w(P)$, 由 Nakayama 引理, $P'=w(P)$, 所以 w 是 $\Lambda[G]$-模满同态. 又因为 P' 是射影 $\Lambda[G]$-模, 且 $P'\cong P/\mathrm{Ker}w$, 所以 $\mathrm{Ker}w$ 是 P 的直和项, 它是有限生成的. 由于 $\mathrm{Ker}w=\mathfrak{m}\mathrm{Ker}w$, 再由 Nakayama 引理, $\mathrm{Ker}w=0$, 从而 w 是 $\Lambda[G]$-模同构. ▎

当 $\Lambda=A$ 是一个完备的离散赋值环时, $k_\Lambda=k$ 是特征 p 的数域, 上面的引理告诉我们, $P_\Lambda(G)$ 与 $P_k(G)$ 基本上是一样的.

命题 1.8 (1) 设 E 是 $A[G]$-模, 则 E 是射影 $A[G]$-模当且仅当 E 是自由 A-模并且 E 的模 $\mathfrak{m}$ 约化 $\bar{E}=E/\mathfrak{m}E$ 是射影 $k[G]$-模;

(2) 若 F 是射影 $k[G]$-模, 则在同构意义下存在唯一的射影 $A[G]$-模 P 使得 $F\cong P/\mathfrak{m}P$.

证明 由引理 1.5 和 1.7, 只要证明射影 $A[G]$-模 P 的存在性. 设 $A_n=A/\mathfrak{m}^n$, 则 $A_1=k$, $A=\varprojlim A_n$ 是逆向系统 $\{A_n;\theta_{n+1}: A_{n+1}\to A_n\}$ 的射影极限(见附录 C). 因为每个 A_n 与 $A_n[G]$ 满足关于理想的降链条件, 所以 F 作为 $A_n[G]$-模有射影包 P_n 使得 P_n 是自由 A_n-模, 特别 $P_1=F$. 作为 $A_n[G]$-模满同态 $f: P_n\twoheadrightarrow F$, 它诱导了 $A_n[G]$-模的满同态 $\gamma: P_n/\mathfrak{m}P_n\twoheadrightarrow F$ 使下图

$$
\begin{array}{ccc}
P'\subset P_n & \xrightarrow{\ f\ } & F \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & \nearrow{\scriptstyle \gamma} & \\
F'\subset P_n/\mathfrak{m}P_n & &
\end{array}
$$

是交换图. 因为 F 是射影 $k[G]$-模, 存在 $P_n/\mathfrak{m}P_n$ 的 $k[G]$-子模 F', 它与 F 同构, 而 F' 在 P_n 中的原像 P' 在本质同态 $f: P_n\twoheadrightarrow F$ 下映到 F 上, 所以 $P'=P_n$, 从而 $P_n/\mathfrak{m}P_n\twoheadrightarrow F$ 是 $k[G]$-模同构. 设

$P=\varprojlim P_n$，则 P 是自由 A-模，它作为 $A[G]$-模是射影的并且 $\overline{P}=P/\mathfrak{m}P$ 与 F 同构. ▌

推论 1.9 每个有限生成的射影 $A[G]$-模是射影不可分解 $A[G]$-模的直和，在同构的意义下这个分解是唯一的，并且每个射影不可分解 $A[G]$-模的模 $\mathfrak{m}$ 约化恰好是一个射影不可分解 $k[G]$-模.

证明 用命题 1.8、命题 1.1 以及第一章定理 3.2. ▌

推论 1.10 两个有限生成的射影 $A[G]$-模 P 与 Q 同构的充分必要条件是在 $P_A(G)$ 中 $[P]=[Q]$.

证明 用推论 1.9. ▌

推论 1.11 模 $\mathfrak{m}$ 约化定义了 Grothendieck 群 $P_A(G)$ 到 $P_k(G)$ 的同构，它把 $P_A^+(G)$ 映到 $P_k^+(G)$ 上.

证明 用推论 1.9. ▌

由此可见，我们可以把 $P_A(G)$ 与 $P_k(G)$ 等同起来.

定义 1.12 设 V 是一个有限生成 $K[G]$-模，V 中一个 $A[G]$-格 M 是 V 的一个 $A[G]$-子模，它作为 A-模是有限秩的自由模，使得 $K\otimes_A M=V$.

命题 1.13 每个有限生成 $K[G]$-模 V 有一个 $A[G]$-格 M.

证明 设 $\{v_1,\cdots,v_d\}$ 是 V 的一个 K-基，即 $V=\sum_{i=1}^{d}Kv_i$. 令

$$M=\sum_{i=1}^{d}A[G]v_i,$$

因为 A 是一个主理想整环，由第一章 §3 习题 1，易见 M 作为 A-模是有限生成的自由模并且 $V=K\otimes_A M$，即 M 是 V 的一个 $A[G]$-格. ▌

如果 M 是有限生成 $K[G]$-模 V 的一个 $A[G]$-格，$\{m_1,\cdots,m_d\}$ 是 M 的一个 A-基，那么 $\{1\otimes m_1,\cdots,1\otimes m_d\}$ 是 V 的一个 K-基. 因此有

命题 1.14 G 的每个 K-线性表示等价于一个 A-线性表示，

即这个线性表示在适当选取的一个基下的矩阵的元素都在 A 中.

▌

考虑典范映射 $A \to A/\mathfrak{m}=k$,它把每个 $\alpha\in A$ 映到 $\bar{\alpha}\in k$. 设 M 是 $K[G]$-模 V 内的一个 $A[G]$-格,$\bar{M}=M/\mathfrak{m}M$ 通过

$$\left(\sum_{x\in G}\overline{\alpha(x)x}\right)\bar{m}=\sum_{x\in G}\overline{\alpha(x)xm},\quad \alpha(x)\in A, m\in M$$

成为一个 $k[G]$-模,称为 M 的**模 $\mathfrak{m}$ 约化**.

命题 1.15 设 M 与 N 是有限生成 $K[G]$-模 V 的两个 $A[G]$-格,则在 $R_k(G)$中有$[\bar{M}]=[\bar{N}]$,即作为 $k[G]$-模 $\bar{M}$ 与 $\bar{N}$ 有相同的合成因子.

证明 因为 $M+N$ 也是 V 内的一个 $A[G]$-格,所以我们可以假定 $M\subset N$. 进一步可以假定 M 是 N 的极大子模(作为 $A[G]$-模,M 与 N 满足关于子模的升链条件),于是 $\mathfrak{m}N\subset M$. 设若不然,则 $M+\mathfrak{m}N$ 真包含 M,迫使 $N=M+\mathfrak{m}N$. 由 Nakayama 引理,$N=M$,从而与假设矛盾. 因此我们有

$$\mathfrak{m}M\subset\mathfrak{m}N\subset M\subset N.$$

由第二章的命题 3.9,在 $R_k(G)$中$[\bar{M}]=[\bar{N}]$当且仅当 $\bar{M}$ 与 $\bar{N}$ 有相同的合成因子,所以我们必须证明 $M/\mathfrak{m}M$ 与 $N/\mathfrak{m}N$ 作为 $k[G]$-模有相同的合成因子. 由于这两个模都包含了 $M/\mathfrak{m}N$ 的 $k[G]$-模合成因子,我们只要证明 N/M 与 $\mathfrak{m}N/\mathfrak{m}M$ 有相同的 $k[G]$-模合成因子. 因为 $\mathfrak{m}$ 是 A 的主理想,即存在 $p\in A$ 使得 $\mathfrak{m}=pA$,所以 $\bar{n}\to\overline{pn}$给出了 $A[G]$-模 N/M 到 $\mathfrak{m}N/\mathfrak{m}M$ 上的同构,从而也是 $k[G]$-模同构. ▌

最后,由于 $R_K(G)$,$R_k(G)$与 $P_k(G)$都是 **Z**-模(其实还是自由 **Z**-模),我们可以考虑 $R_K(G)$与 $R_k(G)$间的对偶及 $R_k(G)$与 $P_k(G)$间的对偶. 我们不在这里写出详细的证明细节,有兴趣的读者可以参考[CR2]中 p. 212 及 p. 432~434.

对任意的 $K[G]$-模 E 与 F,定义

$$(E,F)_K=\dim_K\mathrm{Hom}_{K[G]}(E,F).$$

于是得到双线性型

$$R_K(G) \times R_K(G) \to \mathbf{Z},$$

记为$([E],[F])_K=(E,F)_K$. 当 K 包含所有 m 次单位根(m 是 G 的元素的阶的最小公倍数)时,对每个单 $K[G]$-模 E,有$(E,E)_K=1$. 因此双线性型非退化使 $R_K(G)$与它的对偶同构.

又对任意的射影 $k[G]$-模 P 与 $k[G]$-模 E,定义

$$(P,E)_k=\dim_k \mathrm{Hom}_{k[G]}(P,E).$$

于是得到双线性型

$$P_k(G) \times R_k(G) \to \mathbf{Z},$$

记为$([P],[E])_k=(P,E)_k$. 当 $E,E' \in S_k$ 时,由于 $\mathrm{Hom}_{k[G]}(P_E,E') \cong \mathrm{Hom}_{k[G]}(E,E')$,当 k 包含所有 m 次单位根时,有$(P_E,E')_k=\delta_{EE'}$,因此双线性型是非退化的,使得$[E]$与$[P_E]$($E \in S_k$)关于这个双线性型是互相对偶的.

习　　题

1. 证明 $k[G]$是内射 $k[G]$-模,一个 $k[G]$-模是射影的当且仅当它是内射的,并且射影不可分解模是单 $k[G]$-模的内射包.

2. 设 Λ 是交换环,P 是 $\Lambda[G]$-模,它作为 Λ-模是射影的,证明下述性质等价:

(1) P 是射影 $\Lambda[G]$-模;

(2) 对 Λ 的每个极大理想 $\mathfrak{p}$,$(\Lambda/\mathfrak{p})[G]$-模 $P/\mathfrak{p}P$ 是射影模.

3. 设 $E,E' \in S_k$,证明

$$\mathrm{Hom}_{k[G]}(P_E,E') \cong \mathrm{Hom}_{k[G]}(E,E').$$

4. 设群 G 的元素的阶的最小公倍数 $m=p^e m'$,其中 m'与素数 p 互素. 证明:当 K 包含全部 m 次单位根时,k 也包含全部 m' 次单位根.

§2　Cartan-Brauer 三角形

本节我们将要定义三个 Abel 群同态 $d: R_K(G) \to R_k(G)$,

$c: P_k(G) \to R_k(G)$ 和 $e: P_k(G) \to R_K(G)$，使得下面的 **Cartan-Brauer 三角形**

$$\begin{array}{ccc} R_K(G) & \xrightarrow{\quad d \quad} & R_k(G) \\ & {}_{e}\nwarrow \quad \nearrow_{c} & \\ & P_k(G) & \end{array}$$

是交换图.

首先定义 **Cartan 同态** $c: P_k(G) \to R_k(G)$. 由于 $\{[S] \mid S \in S_k\}$ 是 $R_k(G)$ 的基，$\{[P_T] \mid T \in S_k\}$ 是 $P_k(G)$ 的基，对于 $S, T \in S_k$，令 C_{ST} 等于单 $k[G]$-模 S 在单 $k[G]$-模 T 的射影包 P_T 的合成列中出现的重数，这些非负整数形成一个 $S_k \times S_k$ 型矩阵 $C = (c_{ST})_{S,T \in S_k}$，通常称为 G 的 **Cartan 矩阵**. 显然，这个矩阵依赖于数域 k. 于是对每个 $T \in S_k$，有

$$c([P_T]) = \sum_{S \in S_k} c_{ST}[S].$$

其次定义**分解同态** $d: R_K(G) \to R_k(G)$. 由于 $\{[E] \mid E \in S_K\}$ 是 $R_K(G)$ 的基，对于 $E \in S_K, F \in S_k$，令 d_{FE} 等于单 $k[G]$-模 F 在单 $K[G]$-模 E 的 $A[G]$-格 E_1 的模 $\mathfrak{m}$ 约化 $\overline{E}_1$ 的合成列中出现的重数. 由于命题 1.15，这样定义的非负整数 d_{FE} 是有意义的，它们形成一个 $S_k \times S_K$ 型矩阵 $D = (d_{FE})_{F \in S_k, E \in S_K}$，通常称为 G 的**分解矩阵**. 显然，这个矩阵与数域 K 与 k 的取法有关. 于是

$$d([E]) = \sum_{F \in S_k} d_{FE}[F].$$

最后定义同态 $e: P_k(G) \to R_K(G)$. 由于推论 1.11，$P_k(G)$ 与 $P_A(G)$ 同构，把这个典范同构与由 $[P] \mapsto [K \otimes_A P]$ 定义的同态 $P_A(G) \to R_K(G)$ 合成，就得到了同态 e. 相应的矩阵 $E =$

$(e_{EF})_{E\in S_K, F\in S_k}$是一个 $S_K\times S_k$ 型矩阵.

我们先罗列一些 Cartan-Brauer 三角形的基本性质：

(1) $c=d\circ e$,或等价地 $C=DE$.

为此我们必须证明对于每个射影 $k[G]$-模 U,有 $d(e([U]))=c([U])$. 由命题 1.8,存在射影 $A[G]$-模 P,使得 $\bar{P}=U$. 由定义,$e([U])=[K\otimes_A P]$,P 是 $K\otimes_A P$ 内的一个 $A[G]$-格. 从而在 $R_k(G)$中有

$$d(e([U]))=[\bar{P}]=[U].$$

另一方面,$[U]$是 $c([U])$在 $R_k(G)$中的像,因此

$$d(e([U]))=c([U]).$$

(2) 同态 d 与 e 关于上一节中所定义的两个双线性型是伴随的,即对于 $x\in P_k(G)$,$y\in R_K(G)$,有

$$(x,d(y))_k=(e(x),y)_K.$$

特别,当 K 和 k 包含所有 m 次单位根时,$P_k(G)$的典范基(相应的,$R_K(G)$的典范基)与 $R_k(G)$的典范基(相应的,$R_K(G)$的典范基)关于双线性型是对偶基,由此我们能证明 $E=D^{\mathrm{T}}$,$C=DE=DD^{\mathrm{T}}$ 是对称矩阵,其中 m 是 G 中元素的阶的最小公倍数.

这里我们只需证明等式$(x,d(y))_k=(e(x),y)_K$ 成立. 设 $x=[X]$,$y=[K\otimes_A Y]$,这里 $X\in P_A(G)$,Y 是 $A[G]$-模,作为 A-模是有限秩的自由模. 于是 $\mathrm{Hom}_{A[G]}(X,Y)$是自由 A-模,设 r 是它的秩. 因为

$$K\otimes_A\mathrm{Hom}_{A[G]}(X,Y)\cong\mathrm{Hom}_{K[G]}(K\otimes_A X,K\otimes_A Y),$$

$$k\otimes\mathrm{Hom}_{A[G]}(X,Y)\cong\mathrm{Hom}_{k[G]}(k\otimes X,k\otimes Y),$$

所以$(e(x),y)_K=r=(x,d(y))_k$.

当 K 和 k 包含所有 m 次单位根时,对 $T\in S_k$,$S\in S_K$,有

$$([P_T],d([S]))_k=\sum_{F\in S_k}d_{FS}([P_T],[F])_k=d_{TS},$$

$$(e([P_T]),[S])_K=\sum_{F\in S_k}e_{FT}([F],[S])_k=e_{ST}.$$

于是 $d_{TS}=e_{ST}, E=D^{\mathrm{T}}$.

(3) 同态 $d: R_K(G)\to R_k(G)$是满同态.

(4) 同态 $e: P_k(G)\to R_K(G)$是分裂的单一同态,即 e 是单一同态并且 $e(P_k(G))$是 $R_K(G)$的直和项.

(5) 同态 e 的像是 $R_K(G)$中那些其虚特征标在 G 的 p-奇异元素上为零的元素组成,即

$$e(P_k(G))=\left\{x\in R_K(G)\,\middle|\, x \text{ 的虚特征标 } \chi_x \text{ 在 } G_{\mathrm{reg}} \text{ 外为零}\right\},$$

这里 G_{reg}表示 G 中所有 p-正则元素的集合. 回忆一下,群 G 的一个元素称为 p-正则元素,如果它的阶与 p 互素,否则就称为 **p-奇异元素**.

(6) 同态 $c: P_k(G)\to R_k(G)$是单一同态,它的余核 $R_k(G)/c(P_k(G))$是一个有限 p-群. 这就是说,当 $|G|=p^n l$, p 是素数,$(p,l)=1$ 时,$p^n R_k(G)\subset c(P_k(G))$.

特别,当 K 和 k 包含所有 m 次单位根时,对 $x\in P_k(G)$,有

$$(x,c(x))_k=(x,d(e(x)))_k=(e(x),e(x))_K>0,$$

即双线性型是正定的. 因为 c 的余核是有限 p-群,所以 Cartan 矩阵 C 的行列式 $\det(C)$是 p 的幂.

我们不准备仔细证明这些基本性质,有兴趣的读者可以参考[S]的第 15、16、17 章或[CR2]的 § 18.

例 1 设 G 的阶与素数 p 互素,则 C, D, E 都可以取作单位矩阵,即 G 在 k 上的表示理论与在 K 上的表示理论是一样的.

首先考虑 $A[G]$-模 E,它作为 A-模是自由的. $E=L/R$,其中 L 是自由 $A[G]$-模,作为 A-模有 $L=E\oplus R$. 令 $\pi: L\to R$ 是 A-线性映射,用 $\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}x\pi x^{-1}$ 代替 π,得到 $A[G]$-线性映射,因此 E 是射影 $A[G]$-模. 同理,每个 $k[G]$-模 E 都是射影 $k[G]$-模. 于是,我们可以适当编排 S_k 中元素的次序使得 Cartan 矩阵 C 是单位矩阵.

其次考虑 $E\in S_k$,存在射影 $A[G]$-模 E_1 使得 $E=E_1/\mathfrak{m}E_1$. 令

$Z=K\otimes_A E_1$，则 $d([Z])=[E]$. 因为 E 是单 $k[G]$-模，所以 Z 是单 $K[G]$-模. 这样得到从 S_k 到 S_K 内的映射 $[E]\mapsto[Z]$，它是分解同态的逆. 适当编排 S_K 与 S_k 中元素的次序以后，分解矩阵 D 是单位矩阵，从而 E 也是单位矩阵.

例 2 设 G 的阶是素数 p 的幂，即 G 是 p-群. 考虑 $k[G]$-模 E. 设 $v\in E, v\neq 0$，令 X 是 v 在 G 作用下的轨道所生成的 E 的子群. 设 $Gv=\{x_iv \mid x_i\in G, 1\leqslant i\leqslant t\}$，其中 $t=|G\backslash \mathrm{Stab}_G v|$，$x_i$ 是 G 关于 $\mathrm{Stab}_G v$ 的陪集代表元，则 $w=\sum\limits_{i=1}^{t}x_iv\in X^G$，从而 $X^G\neq\{0\}$，因此仅有的单 $k[G]$-模是平凡模 k，它的射影包是 $k[G]$. 于是，$R_k(G)=\mathbf{Z}$，$P_k(G)=\mathbf{Z}$. 设 $|G|=p^a$，则 Cartan 同态 $c:\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ 由 $n\mapsto p^a n$ 定义. 而分解同态 $d:R_K(G)\to\mathbf{Z}$ 由 $[Z]\mapsto \dim_K Z\,(Z\in S_K)$ 定义，同态 $e:\mathbf{Z}\to R_K(G)$ 由 $n\mapsto n[K[G]]$ 定义.

设 $Z_1,\cdots,Z_h$ 是单 $K[G]$-模的同构类的代表元集，$n_i=\dim_K Z_i$，$1\leqslant i\leqslant h$，则

$$D=(n_1,\cdots,n_h),\quad E=D^{\mathrm{T}},$$
$$C=DE=DD^{\mathrm{T}}=\Big(\sum_{i=1}^{h}n_i\Big)=(p^a).$$

例 3 设 $G=S\times P$，其中 S 的阶与素数 p 互素，P 是一个 p-群，于是 $k[G]=k[S]\otimes_k k[P]$.

首先，一个 $k[G]$-模 E 是半单的当且仅当 P 平凡地作用在 E 上. 显然，当 P 平凡地作用在 E 上时，E 是一个 $k[S]$-模，由例 1，每个 $k[S]$-模是半单的. 反之，当 E 是个单 $k[G]$-模时，由例 2，$E^P\neq\{0\}$. 但 $P\lhd G$，故 E^P 是 E 的 $k[G]$-子模，从而 $E^P=E$，即 P 平凡地作用在 E 上.

其次，一个 $k[G]$-模 E 是射影的当且仅当 E 同构于 $F\otimes_k k[P]$，其中 F 是一个 $k[S]$-模. 由例 1，F 是射影 $k[S]$-模，从而 $F\otimes_k k[P]$ 是射影 $k[G]$-模. 反之，当 E 是射影 $k[G]$-模时，E 是其最大半单商模 F 的射影包. 但是 P 平凡地作用在 F 上使得 F

成为 $k[S]$-模. 这时，$F\otimes_k k[P]$是射影 $k[G]$-模，F 是它的最大半单商模，从而 $F\otimes_k k[P]$是 F 作为 $k[G]$-模的射影包，于是

$$E\cong F\otimes k[P].$$

设$|P|=p^e$，则 G 的 Cartan 矩阵是纯量阵 $p^e I$.

习　题

1. 设 G 是 2 阶循环群，$p=2$，又设 $E=K[G]$. 证明 E 有 $A[G]$-格 E_1，它的模 2 约化 $\overline{E}_1$ 是半单的，同构于 $k\oplus k$；E 还有其他的 $A[G]$-格 E_2，它的模 2 约化 $\overline{E}_2$ 不是半单的，同构于 $k[G]$.

2. 设 G 是 4 阶循环群，证明分解同态

$$d: R_Q(G)\to R_{Z/5Z}(G)$$

不是满同态.

3. 设 $x\in R_k(G)$，$y\in P_k(G)$，证明 $c(x\cdot y)=x\cdot c(y)$.

4. 设 $x\in R_K(G)$，$y\in P_k(G)$，证明 $e(d(x)\cdot y)=x\cdot e(y)$.

5. 证明：或者 S 是射影 $k[G]$-模，$P_S=S$ 且 $c_{SS}=1$，或者 $c_{SS}\geqslant 2$，$S\in S_k$.

§3　Brauer 特征标理论

回忆一下，有限群 G 的一个元素是 p-正则元素，如果它的阶与素数 p 互素. 用 G_{reg}来表示 G 中 p-正则元素的集合，并设 m'是 G_{reg}中元素的阶的最小公倍数，则$(m',p)=1$. 当 K 包含所有 m'次单位根时，从域 K 到域 k 的模 $\mathfrak{m}$ 约化过程并不改变 K 的 m'次单位根，即 K 中 m'次单位根所成的乘法群 μ_K 与 k 中 m'次单位根所成的乘法群 μ_k 是同构的. 对于 $\lambda\in\mu_k$，设 $\tilde{\lambda}\in\mu_K$ 使得 $\tilde{\lambda}$模 $\mathfrak{m}$ 约化后是 λ.

设 E 是一个 $k[G]$-模，$\dim_k E=n$，即存在 G 的线性表示 $\rho: G\to GL(E)$. 对于 $x\in G_{\text{reg}}$，ρ_x 是 E 上可逆线性变换. 因为 x 的阶与

p-互素，ρ_x 可以对角化，即适当选取 E 的基后，ρ_x 的矩阵是对角阵，它的特征值是 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mu_k$.

定义 3.1 对于每个 $k[G]$-模 E，由

$$\varphi_E(x)=\sum_{i=1}^{n}\tilde{\lambda}_i,\quad x\in G_{\mathrm{reg}}$$

定义的 K-值函数 φ_E： $G_{\mathrm{reg}}\to A\subset K$ 称为 E 的 **Brauer 特征标**. 而把迹函数 $x\mapsto \mathrm{tr}(\rho_x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ 称为 E 的 **k-特征标**.

$k[G]$-模 E 的 Brauer 特征标有以下基本性质：

(1) $\varphi_E(1)=n=\dim_k E$.

(2) φ_E 是 G_{reg}上类函数，即

$$\varphi_E(yxy^{-1})=\varphi_E(x),\quad x\in G_{\mathrm{reg}},y\in G.$$

(3) 若 $0\to E'\to E\to E''\to 0$ 是 $k[G]$-模的正合列，则

$$\varphi_E=\varphi_{E'}+\varphi_{E''}.$$

(4) $\varphi_{E_1\otimes E_2}=\varphi_{E_1}\varphi_{E_2}$.

(5) 对于 $\alpha\in A$，用 $\bar{\alpha}$表示 α 的模 m 约化，即 $\bar{\alpha}$是 α 在典范同态 $A\to A/\mathrm{m}=k$ 下的像. 设 $y\in G$，它的 p'-分支 $x\in G_{\mathrm{reg}}$，因为 $\rho_{y^{-1}x}$的特征值是 p^a 次单位根，char $k=p$，所以 $\rho_{y^{-1}x}$的特征值都是 1. 由于 ρ_x 可对角化，$\rho_y\rho_x=\rho_x\rho_y$，于是 ρ_x 与 ρ_y 有相同的特征值，即

$$\mathrm{tr}(\rho_y)=\overline{\varphi_E(x)}.$$

(6) 设 V 是 $K[G]$-模，它的特征标是 χ. 又设 M 是 V 内 $A[G]$-格，$E=M/\mathrm{m}M$ 是它的模 m 约化，则

$$\varphi_E=\chi|_{G_{\mathrm{reg}}}.$$

不妨设 G 是阶与 p 互素的循环群，由命题 1.15，φ_E 与 M 的取法无关，因此可设 M 是由特征向量张成的. 这时，显然有 φ_E 是 χ 在 G_{reg}上的限制.

(7) 设 P 是射影 $k[G]$-模，又设 $\tilde{P}$ 是射影 $A[G]$-模使得 $P=\tilde{P}/\mathrm{m}\tilde{P}$. 用 Φ_P 表示 $K[G]$-模 $K\otimes_A\tilde{P}$ 的特征标. 若 E 是另一个

$k[G]$-模，由命题 1.6，$E\otimes_k P$ 是射影 $k[G]$-模，则

$$\Phi_{E\otimes P}(x)=\begin{cases}\varphi_E(x)\Phi_P(x), & x\in G_{\mathrm{reg}}\text{ 时},\\ 0, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

因此我们可以写成 $\Phi_{E\otimes P}=\varphi_E\Phi_P$，虽然 φ_E 在 G_{reg}外没有定义.

因为同态 e： $P_k(G)\to R_K(G)$的像由 $R_K(G)$中那些其特征标在 p-奇异元素上为零的 $K[G]$-模组成，所以当 $x\notin G_{\mathrm{reg}}$ 时，$\Phi_{E\otimes P}(x)=0$. 由(6)，$\Phi_{E\otimes P}|_{G_{\mathrm{reg}}}$等于 $E\otimes P$ 的 Brauer 特征标. 但是，$\Phi_P|_{G_{\mathrm{reg}}}$就是 P 的 Brauer 特征标，由(4)就有

$$\Phi_{E\otimes P}|_{G_{\mathrm{reg}}}=\varphi_E\,\Phi_P|_{G_{\mathrm{reg}}}.$$

(8) 在(7)同样的假设下，有

$$(P,E)_k=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G_{\mathrm{reg}}}\overline{\Phi_P(x)}\varphi_E(x)=(\Phi_P,\varphi_E).$$

显然 $(P,E)_k=\dim_k\mathrm{Hom}_{k[G]}(P,E)=\dim_k\mathrm{Hom}_k(P,E)^G$，$H=\mathrm{Hom}_k(P,E)$是射影 $k[G]$-模. 如果 $\widetilde{H}$是射影 $A[G]$-模使得 $H=\widetilde{H}/\mathfrak{m}\widetilde{H}$，那么 $\dim_k H^G=\mathrm{rank}_A\widetilde{H}^G=\dim_K(K\otimes_A\widetilde{H})^G$. 设 Φ_H 是 $K[G]$-模 $K\otimes_A\widetilde{H}$的特征标，则

$$(P,E)_k=(1,\Phi_H)_K=\frac{1}{|G|}\sum_{y\in G}\Phi_H(y)$$

$$=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G_{\mathrm{reg}}}\Phi_H(x).$$

但是作为 $k[G]$-模 $H\cong P^*\otimes_k E$，由(7)有 $\Phi_H=\overline{\Phi}_P\varphi_E$，于是就得到了上面的等式.

(9) 射影 $k[G]$-模 P 的 G 不动点组成的 k-子空间 P^G 的维数等于

$$(1,\Phi_P)=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G_{\mathrm{reg}}}\Phi_P(x).$$

定理 3.2(Brauer) 不可约 Brauer 特征标 $\varphi_E(E\in S_k)$的集合成为 G_{reg}上 K-值类函数所成的 K-向量空间的基.

证明 首先证明所有的 $\varphi_E(E\in S_k)$ 在 K 上是线性无关的. 如果有 $\sum\limits_{E\in S_k}\alpha_E\varphi_E=0$,其中 $\alpha_E\in K$ 不全为零,因为 K 可以看作 A 的分式域,用这些 α_E 的"公分母"去乘这个关系式,我们可以假定所有的 $\alpha_E\in A$. 又因为 A 中非可逆元被 $\mathfrak{m}$ 的生成元 p 的幂除尽,用 p 的一个适当的幂次来除这个关系式,我们还可以假定至少有一个 $\alpha_{E_0}\notin\mathfrak{m}$. 通过模 $\mathfrak{m}$ 约化,有

$$\sum_{E\in S_k}\bar{\alpha}_E\,\overline{\varphi_E(x)}=0,\ x\in G_{\mathrm{reg}},$$

其中至少一个系数 $\bar{\alpha}_{E_0}\neq 0$. 由(5),对所有的 $y\in G$ 有

$$\sum_{E\in S_k}\bar{\alpha}_E\mathrm{tr}(\rho_E(y))=0.$$

这就是说,S_k 中单 $k[G]$-模的 k-特征标的集合在 k 上线性相关,但这是不可能的(参考[CR2]的 p. 423 与 p. 419 或[S]的 p. 150). 因此所有的 $\varphi_E(E\in S_k)$ 在 K 上线性无关.

其次证明 $\varphi_E(E\in S_k)$ 生成 G_{reg} 上 K-值类函数所成的 K-向量空间. 设 f 是 G_{reg} 上 K-值类函数,它可以扩充为 G 上的 K-值类函数 f'(例如,只要令 $f'(x)=f(x),x\in G_{\mathrm{reg}}$ 及 $f'(y)=0,y\notin G_{\mathrm{reg}}$ 即可). 但是,$\chi_Z(Z\in S_K)$ 是 G 上 K-值类函数所成的 K-向量空间的基,所以 $f'=\sum\limits_{Z\in S_K}\beta_Z\chi_Z,\ \beta_Z\in K$. 于是

$$f=\sum_{Z\in S_K}\beta_Z\chi_Z\Big|_{G_{\mathrm{reg}}}=\sum_{Z\in S_K}\sum_{E\in S_k}\beta_Z d_{EZ}\varphi_E,$$

这正是我们所要证明的. ▍

现在,下面的三个推论就成为显然的了.

推论 3.3 设 F 与 F' 是两个 $k[G]$-模使得 $\varphi_F=\varphi_{F'}$,则在 $R_k(G)$ 中有 $[F]=[F']$. 又若 F 与 F' 是半单的,则 $F\cong F'$. ▍

推论 3.4 分解同态 $d: R_K(G)\to R_k(G)$ 的核 $\mathrm{Ker}\,d=\{x\in R_K(G)\mid x$ 的虚特征标 χ_x 在 G_{reg} 上为零$\}$. ▍

推论 3.5 单 $k[G]$-模的同构类的数目等于 G 的 p-正则元素

的共轭类的数目. ∎

从 Brauer 特征标的角度来考察 Cartan-Brauer 三角形,可以对 Cartan 同态与分解同态作出新的解释.

如果用 $F_K(G_{reg})$来表示 G_{reg}上 K-值类函数所成的 K-向量空间,那么 $x \mapsto \varphi_x$,给出了 $K\otimes_Z R_K(G)$到 $F_K(G_{reg})$上的向量空间同构,其中 $x\in K\otimes_Z R_K(G)$. 又由 § 2 的基本性质(4)与(5),映射

$$K \otimes e : K \otimes_Z P_k(G) \to K \otimes_Z R_K(G)$$

把 $K\otimes P_k(G)$同构地映到 G 上 K-值类函数所成的 K-向量空间 $F_K(G)$的一个子空间上,这个子空间是由那些在 G_{reg}外为零的类函数组成的. 因此,Cartan-Brauer 三角形中的映射

$$K \otimes c : K \otimes_Z P_k(G) \to K \otimes_Z R_k(G)$$

与

$$K \otimes d : K \otimes_Z R_K(G) \to K \otimes_Z R_k(G)$$

都是限制映射. 但是 $K\otimes e$ 是包含映射,由 § 2 基本性质(6),$K\otimes c$ 是一个同构. 这样得到了下面的交换图.

G 上 K-值类函数在 G_{reg}外为零 —— $K\otimes c$ ($\cong$) ⟶ G_{reg}上 K-值类函数

$K\otimes e$ ↘ G 上 K-值类函数 ↗ $K\otimes d$

对 $Z\in S_K$,设 χ_Z 是 Z 的特征标. 对 $E\in S_k$,设 φ_E 是 E 的 Brauer 特征标,Φ_E 是 E 的射影包 P_E 的特征标. 则有

$$\begin{cases} \chi_Z = \sum_{E\in S_k} d_{EZ}\varphi_E, & \text{在 } G_{reg} \text{ 上}; \\ \Phi_E = \sum_{Z\in S_K} d_{EZ}\chi_Z, & \text{在 } G \text{ 上}; \\ \Phi_E = \sum_{F\in S_k} c_{FE}\varphi_F, & \text{在 } G_{reg} \text{ 上}. \end{cases}$$

例 1 对称群 S_4 的 Brauer 特征标.

由于 S_4 的阶为 $24=2^3\times3$，我们将分别对 $p=2$ 及 $p=3$ 两种情况计算 S_4 的 Brauer 特征标.

(1) $p=2$ 时，G 中有两个 2-正则元素的共轭类，它们的代表元分别是：(1)与(1 2 3). 由推论 3.5，G 有两个特征 2 的不可约线性表示：一个 1 次不可约线性表示是单位表示，它的 Brauer 特征标是 φ_1，另一个 2 次不可约线性表示是 S_4 的 2 次不可约线性表示的模 2 约化，它的 Brauer 特征标是 φ_2. 于是有下表：

$\mathfrak{C}(x)$	(1)	(1 2 3)
$c(x)$	1	8
φ_1	1	1
φ_2	2	-1

回忆一下第二章 § 2 例 3，在 G_{reg} 上有：

$$\chi_1=\chi_2=\varphi_1,$$

$$\chi_3=\varphi_2,$$

$$\chi_4=\chi_5=\varphi_1+\varphi_2,$$

因此

$$D=\begin{bmatrix}1&1&0&1&1\\0&0&1&1&1\end{bmatrix},\quad C=DD^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}4&2\\2&3\end{bmatrix}.$$

如果用 Φ_1 与 Φ_2 分别表示对应于 φ_1与 φ_2的射影不可分解模的特征标，那么在 G 上有

$$\Phi_1=\chi_1+\chi_2+\chi_4+\chi_5,$$

$$\Phi_2=\chi_3+\chi_4+\chi_5;$$

在 G_{reg}上有

$$\Phi_1=4\varphi_1+2\varphi_2,$$

$$\Phi_2=2\varphi_1+3\varphi_2.$$

(2) $p=3$ 时，G 中有 4 个 3-正则元素的共轭类，它们的代表元分别是：(1)，(1 2)，(1 2 3 4)与(1 2)(3 4)，因此有 4 个特征 3 的不可约线性表示. 易见 χ_1，χ_2，χ_4 与 χ_5 对应的不可约线性表示的

模 3 约化仍然是不可约的，它们的 Brauer 特征标分别是 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 与 φ_4. 于是有下表：

$\mathfrak{C}(x)$	(1)	(1 2)	(1 2 3 4)	(1 2) (3 4)
$c(x)$	1	6	6	3
φ_1	1	1	1	1
φ_2	1	-1	-1	1
φ_3	3	1	-1	-1
φ_4	3	-1	1	-1

因为在 G_{reg}上有 $\chi_3=\varphi_1+\varphi_2$，所以

$$D=\begin{bmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$C=DD^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\1&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

如果用 Φ_1,Φ_2,Φ_3 与 Φ_4 分别表示对应于 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 与 φ_4 的射影不可分解模的特征标，那么在 G 上有

$$\Phi_1=\chi_1+\chi_3,$$
$$\Phi_2=\chi_2+\chi_3,$$
$$\Phi_3=\chi_4,$$
$$\Phi_4=\chi_5.$$

最后，我们讨论 Brauer 特征标的正交关系. 设 $Z_1,\cdots,Z_h$ 是单 $K[G]$-模同构类的代表元集，它们的特征标分别是 $\chi_1,\cdots,\chi_h$，次数分别是 $n_1,\cdots,n_h$. 又设 $\mathfrak{C}_1=\{1\},\mathfrak{C}_2,\cdots,\mathfrak{C}_h$ 是 G 的共轭类，其中 $\mathfrak{C}_1,\cdots,\mathfrak{C}_r$ 是 p-正则元素的共轭类，$E_1,\cdots,E_r$ 是单 $k[G]$-模的同构类的代表元集，$\varphi_1,\cdots,\varphi_r$ 分别是它们的 Brauer 特征标，$P_{E_1},\cdots,P_{E_r}$

分别是对应的射影不可分解 $k[G]$-模，它们的 Brauer 特征标分别是 $\eta_1,\cdots,\eta_r$. 再设 $Q_1,\cdots,Q_r$ 是射影不可分解 $A[G]$-模使得 $P_{E_i}=Q_i/\mathfrak{m}Q_i$, $K\otimes Q_i$ 的特征标是 Φ_i, $1\leqslant i\leqslant r$. 因此 Cartan 矩阵 C 与分解矩阵 D 分别是

$$C=(c_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant r},$$
$$D=(d_{ij})_{1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant h}.$$

记 $\varphi_i(\mathfrak{C}_j)=\varphi_i(x)$（类似的，$\eta_i(\mathfrak{C}_j)=\eta_i(x)$，$\chi_i(\mathfrak{C}_j)=\chi_i(x)$），$x\in\mathfrak{C}_j$，令

$$\Phi=(\varphi_i(\mathfrak{C}_j))_{1\leqslant i,j\leqslant r}\ \text{为 } A \text{ 上 } r\times r\text{-矩阵},$$
$$H=(\eta_i(\mathfrak{C}_j))_{1\leqslant i,j\leqslant r}\ \text{为 } A \text{ 上 } r\times r\text{-矩阵},$$
$$X=(\chi_i(\mathfrak{C}_j))_{1\leqslant i\leqslant h,1\leqslant j\leqslant r}\ \text{为 } A \text{ 上 } h\times r\text{-矩阵}.$$

于是，由 Cartan 同态与分解同态的定义有

$$X=D^{\mathrm{T}}\Phi,\quad H=C\Phi.$$

由于 $\{E_1,\cdots,E_r\}$ 的 k-特征标在 k 上线性无关，根据定义，这些 k-特征标由 $\overline{\Phi}=(\overline{\varphi_i(\mathfrak{C}_j)})$ 的行向量所确定，因此 $\det(\overline{\Phi})\neq 0$ 在 k 中成立，即 $\det(\Phi)\notin\mathfrak{m}$. 由于 A 是以 $\mathfrak{m}$ 为其唯一极大理想的局部环且 $A/\mathfrak{m}=k$，因此 $\det(\Phi)$ 是 A 中可逆元. 又根据第二章命题 2.10，如果记 $c_i=|\mathfrak{C}_i|$，$1\leqslant i\leqslant h$，那么

$$\sum_{l=1}^{h}\overline{\chi_l(\mathfrak{C}_i)}\chi_l(\mathfrak{C}_j)=\frac{|G|}{c_i}\delta_{ij},$$

从而

$$\overline{X}^{\mathrm{T}}X=|G|\begin{bmatrix}\frac{1}{c_1} & & & 0\\ & \frac{1}{c_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{c_r}\end{bmatrix}$$

是对角矩阵，特别有 $\det(\overline{X}^{\mathrm{T}}X)\neq 0$. 但是

$$\overline{X}^{\mathrm{T}}X = \overline{\Phi}^{\mathrm{T}}DD^{\mathrm{T}}\Phi = \overline{\Phi}^{\mathrm{T}}C\Phi,$$

因此 $\det(C)\neq 0$. 设 $C^{-1}=(\gamma_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant r}$是 Cartan 矩阵 C 的逆矩阵，又令

$$Y = \left(\frac{|G|}{c_i}\delta_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant r}, \quad Y^{-1} = \left(\frac{c_i}{|G|}\delta_{ij}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant r},$$

于是 $Y=\overline{X}^{\mathrm{T}}X=\overline{\Phi}^{\mathrm{T}}C\Phi$. 这样，我们得到了 Brauer 特征标的下述关系：

$$C^{-1} = \Phi Y^{-1}\overline{\Phi}^{\mathrm{T}},$$
$$I = \Phi Y^{-1}\overline{H}^{\mathrm{T}} = \Phi Y^{-1}\overline{\Phi}^{\mathrm{T}}C,$$
$$C = C\Phi Y^{-1}\overline{H}^{\mathrm{T}} = HY^{-1}\overline{H}^{\mathrm{T}},$$

从而证明了

命题 3.6 (1) $\sum_{k=1}^{r} c_k\varphi_i(\mathfrak{C}_k)\overline{\varphi_j(\mathfrak{C}_k)} = |G|\gamma_{ij}$;

(2) $\sum_{k=1}^{r} c_k\varphi_i(\mathfrak{C}_k)\overline{\eta_j(\mathfrak{C}_k)} = |G|\delta_{ij}$;

(3) $\sum_{k=1}^{r} c_k\eta_i(\mathfrak{C}_k)\overline{\eta_j(\mathfrak{C}_k)} = |G|c_{ij}$. ▌

命题 3.7 (1) $\Phi_j = \sum_{i=1}^{h} d_{ji}\chi_i, 1\leqslant j\leqslant r$;

(2) 对每个 p-奇异元素 $y\in G$, $\Phi_j(y)=0$;

(3) $\{\Phi_1,\cdots,\Phi_r\}$是在 G 的 p-奇异元素处取值为零的 K-特征标所张成的向量空间的一个整基.

证明 (1) 由 Brauer 特征标的性质(6)，$\Phi_j|_{G_{\mathrm{reg}}}=\eta_j$，因此

$$([K\otimes Q_j],[Z_i])_K = ([P_{E_j}],[\overline{Z}_i])_k$$
$$= \left([P_{E_j}],\sum_{k=1}^{r} d_{ki}[E_k]\right)_k = d_{ji},$$

这证明了(1).

(2) 因为

$$(\Phi_j,\Phi_j)_K = \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\overline{\Phi_j(x)}\Phi_j(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{h} d_{ji}^2 \left(\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \overline{\chi_i(x)} \chi_i(x) \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{h} d_{ji}^2 = c_{jj}.$$

但是由命题 3.6(3)及 $\Phi_j|_{G_{\text{reg}}} = \eta_j$，有

$$c_{jj} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G_{\text{reg}}} \eta_j(x) \overline{\eta_j(x)} = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G_{\text{reg}}} \Phi_j(x) \overline{\Phi_j(x)}.$$

比较上述两个等式就得到(2).

(3) 只要证明任意的在 p-奇异元素处取值为零的 K-特征标 f 可以写成$\{\Phi_1, \cdots, \Phi_r\}$的整系数线性组合. 设

$$f = \sum_{i=1}^{r} a_i \Phi_i,$$

其中系数 $a_1, \cdots, a_r$ 待定. 因为

$$f(\mathfrak{C}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_i \Phi_i(\mathfrak{C}_j) = \sum_{i=1}^{r} a_i \eta_i(\mathfrak{C}_j), \quad 1 \leqslant j \leqslant r$$

是关于未知元 $a_1, \cdots, a_r$ 的 r 元线性方程组，它的系数矩阵是

$$(\eta_i(\mathfrak{C}_j)) = H = C\Phi,$$

这是一个可逆阵，因此可以解出 $a_1, \cdots, a_r$，从而必须证明 $a_1, \cdots, a_r \in \mathbf{Z}$. 由命题 3.6，$H^{-1} = Y^{-1} \overline{\Phi}^{\mathrm{T}}$，所以

$$a_i = \sum_{j=1}^{r} \frac{c_j}{|G|} f(\mathfrak{C}_j) \overline{\varphi_i(\mathfrak{C}_j)}.$$

但是分解同态 d 是满同态，我们有

$$\overline{\varphi_i(\mathfrak{C}_j)} = \sum_{k=1}^{h} m_{ik} \overline{\chi_k(\mathfrak{C}_j)},$$

其中 $m_{ik} \in \mathbf{Z}$. 由于 f 在 p-奇异元素处取值为零，因此

$$a_i = \sum_{j=1}^{r} \frac{c_j}{|G|} f(\mathfrak{C}_j) \sum_{k=1}^{h} m_{ik} \overline{\chi_k(\mathfrak{C}_j)}$$

$$= \sum_{k=1}^{h} m_{ik} \left(\sum_{j=1}^{r} \frac{c_j}{|G|} f(\mathfrak{C}_j) \overline{\chi_k(\mathfrak{C}_j)} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{h} m_{ik} (\chi_k, f)_K \in \mathbf{Z},$$

这证明了(3). ∎

习　题

1. 分别就 $p=2$, $p=3$ 与 $p=5$ 三种情况，计算交错群 A_5 的 Brauer 特征标表，分解矩阵 D 及 Cartan 矩阵 C.

2. 决定有限 Abel 群 G 的单 $k[G]$-模的 Brauer 特征标表.

3. 设 $H<G$ 是群 G 的子群，F 是 $k[H]$-模，$E=\mathrm{Ind}_H^G F$. 证明

$$\varphi_E(x)=\frac{1}{|H|}\sum_{\substack{y\in G\\ y^{-1}xy\in H}}\varphi_F(y^{-1}xy),\quad x\in G_{\mathrm{reg}}.$$

§4　$k[G]$ 的 块

设 (K,A,k) 是一个 p-模系统，即 K 是代数数域的 p-adic 完备化，相应的离散赋值环 A 关于 p-adic 拓扑是完备的，$\mathfrak{m}$ 是 A 的唯一的极大理想，$k=A/\mathfrak{m}$ 是剩余类域. 我们还假定 K 包含全部 m 次单位根，这里 m 是 G 中元素的阶的最小公倍数.

回忆起群代数 $k[G]$的一个非零元素 f 称为**幂等元**，如果 $f^2=f$. 又设 f 与 f' 是 $k[G]$中两个幂等元，若 $ff'=f'f=0$，则称 f 与 f' 为**正交幂等元**. 一个幂等元 f 不能写成两个正交幂等元的和时，就称为**本原幂等元**. 类似的，可以考虑群代数 $A[G]$的幂等元，正交幂等元与本原幂等元.

由于群代数 $k[G]$满足关于左理想的降链条件，$k[G]$可以分解成不可分解的双边理想的直和：

$$k[G]=B_1\oplus\cdots\oplus B_s.$$

另一方面，设 $S_k=\{E_1,\cdots,E_r\}$是单 $k[G]$-模的同构类的代表元集，则 $k[G]$可以分解成不可分解左理想(即射影不可分解$k[G]$-模)的直和，即

$$k[G]=k[G]f_1\oplus\cdots\oplus k[G]f_r\oplus k[G]f_{r+1}\oplus\cdots\oplus k[G]f_n,$$

其中 $k[G]f_1,\cdots,k[G]f_r$ 是互不同构的完全集，使得

$$P_{E_i} = k[G]f_i, \quad E_i = k[G]f_i/\text{rad } k[G]f_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant r,$$

并且 $k[G]f_i$ 与 $k[G]f_j$ 同构当且仅当 $k[G]f_i/\text{rad } k[G]f_i$ 与 $k[G]f_j/\text{rad } k[G]f_j$ 同构.

易见 $k[G]$ 中一个左理想 $k[G]f$ 是不可分解的当且仅当 f 是一个本原幂等元，P_{E_i} 的合成列中有合成因子同构于 E_j 的充分必要条件是 $f_ik[G]f_j\neq 0$（例如参考[CR1]p. 369、p. 373 及[CR3] p. 411）.

定义 4.1 由本原幂等元 f 与 f' 生成的两个射影不可分解模 $k[G]f$ 与 $k[G]f'$ 是**连结的**，如果存在本原幂等元的序列 $f=f_1,\cdots,f_t=f'$，使得对每个 i，$k[G]f_i$ 与 $k[G]f_{i+1}$ 有公共的合成因子. 两个本原幂等元 f 与 f' 是**连结的**，如果 $k[G]f$ 与 $k[G]f'$ 是连结的. 这是一个等价关系，它把射影不可分解 $k[G]$-模的集合分成有限个等价类. 属于同一个等价类的射影不可分解模的和称为 $k[G]$ 的**块**，或称为 G 的 **p-块**. 两个不可约 $k[G]$模 E 与 E' **属于同一个块**，如果它们都是这个块的合成因子. 特别，平凡模所在的块称为 $k[G]$的**主块**.

易见，$k[G]$的块是不可分解的双边理想，每个直和项 B_i 恰好是 $k[G]$的块（例如参考[CR1]p. 378），于是有

$$1 = \beta_1 + \cdots + \beta_s, \quad \beta_i\beta_j = \beta_j\beta_i = \beta_i\delta_{ij},$$
$$\beta_i \in B_i, \quad B_i = k[G]\beta_i.$$

$\{\beta_1,\cdots,\beta_s\}$称为 $k[G]$的**块幂等元**，或称为**正交中心幂等元**. 显然，$k[G]$的双边理想是 $k[G]$的直和项时，一定是 $k[G]$的块的和，$k[G]$的中心幂等元是块幂等元的和. 现在设 B 是 $k[G]$的一个块，β 是对应的块幂等元，则

$$B = \sum_{k[G]f\subset B} k[G]f, \quad \beta = \sum_{k[G]f\subset B} f.$$

因为在 $i\neq j$ 时 $B_iB_j=0$，所以 $k[G]f\subset B$ 当且仅当 $\beta k[G]f\neq 0$.

命题 4.2 设 ϵ 是 $k[G]$中的一个幂等元，则存在幂等元 $e\in$

$A[G]$使得 e 在典范同态 $A[G]\to k[G]$下的像 $\bar{e}=\varepsilon$,并且 $\varepsilon\in k[G]$ 是本原幂等元当且仅当 $e\in A[G]$是本原幂等元.

证明 考虑 $\mathbf{Z}[X]$中恒等式

$$1=(X+(1-X))^{2n}=\sum_{j=0}^{2n}\binom{2n}{j}X^{2n-j}(1-X)^j,\quad n=1,2,\cdots.$$

记

$$f_n(X)=\sum_{j=0}^{n}\binom{2n}{j}X^{2n-j}(1-X)^j\in\mathbf{Z}[X],$$

则多项式 $f_n(X)$满足下述条件:

(1) $f_n(X)\equiv 0(\bmod X^n)$, $f_n(X)\equiv 1(\bmod (X-1)^n)$;

(2) $(f_n(X))^2\equiv f_n(X)(\bmod X^n(1-X)^n)$;

(3) $f_n(X)\equiv f_{n-1}(X)(\bmod X^{n-1}(X-1)^{n-1})$;

(4) $f_1(X)\equiv X(\bmod (X-X^2))$.

取 $a\in A[G]$使得 $\bar{a}=\varepsilon$,则$\overline{a^2-a}=\varepsilon^2-\varepsilon=0$,即 $a^2-a\in\mathfrak{m}[G]$,因此当 $n\geqslant 2$ 时,由(3)有

$$f_n(a)\equiv f_{n-1}(a)(\bmod \mathfrak{m}^{n-1}[G]).$$

因为 K 是代数数域的 p-adic 完备化,对应的离散赋值环 A 关于 p-adic 拓扑是完备的,所以$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(a)=e$ 在 $A[G]$中存在,并且(2)表明 e 是个幂等元,(4)表明 $e\equiv a(\bmod \mathfrak{m}[G])$,于是 $\bar{e}=\bar{a}=\varepsilon$.

显然,ε 是本原幂等元时,e 也是本原幂等元. 假定 ε 不是本原幂等元,那么存在正交幂等元 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in k[G]$使得

$$\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2.$$

取 $a\in A[G]$使得 $\bar{a}=\varepsilon_1$,再令 $b=eae$,则 $\bar{b}=\bar{e}\ \bar{a}\ \bar{e}=\varepsilon_1$ 且 $be=eb=b$. 如前所证,$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(b)=e_1$ 在 $A[G]$中存在,并且

$$\bar{e}_1=\bar{b}=\varepsilon_1,\quad e_1e=ee_1=e_1.$$

记 $e_2=e-e_1$,则 $e_2^2=e_2\neq 0$ 且 $e_1e_2=e_2e_1=0$,从而 $e\in A[G]$也不是本原幂等元. ∎

设 $\mathfrak{C}_1,\cdots,\mathfrak{C}_h$ 是 G 的共轭类,令

$$e_i = \sum_{x \in \mathfrak{C}_i} x,$$

则 $\{e_1, \cdots, e_h\}$ 分别是群代数的中心 $Z(K[G])$, $Z(A[G])$ 及 $Z(k[G])$ 的 K-基, A-基及 k-基. 于是存在典范的满同态 $Z(A[G]) \to Z(k[G])$: $\sum_{i=1}^{h} a_i e_i \mapsto \sum_{i=1}^{h} \bar{a}_i e_i$, 其中每个 $a_i \in A$, $\bar{a}_i \in k$ 是 a_i 在典范同态 $A \to k = A/\mathfrak{m}$ 下的像. 如果 ε 是 $k[G]$ 的一个**中心幂等元**, 即 ε 是 $Z(k[G])$ 的一个幂等元, 那么可以在 $Z(A[G])$ 中选取 a 使得命题 4.2 中构造的幂等元 $e \in Z(A[G])$ 是一个中心幂等元. 我们还可以证明这样构造的中心幂等元是唯一的. 设若不然, $e' \in Z(A[G])$ 是另一个中心幂等元使得 $\overline{e'} = \varepsilon$, 则 $e(1-e')$ 和 $e'(1-e)$ 都是 $A[G]$ 的中心幂等元, 并且 $\overline{e(1-e')} = \overline{e'(1-e)} = 0$, 因此 $e(1-e')$ 和 $e'(1-e)$ 都在 $\mathfrak{m}[G]$ 中, 从而都在 $\mathfrak{m}^n[G]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 中. 于是 $e(1-e') = e'(1-e) = 0$, 即 $e = e'$.

这样, 我们可以在 $A[G]$ 中找到唯一确定的中心本原幂等元 $b_1, \cdots, b_s$ 使得

$$1 = b_1 + \cdots + b_s, \quad b_i b_j = b_j b_i = b_i \delta_{ij}, \quad \bar{b}_1 = \beta_1, \cdots, \bar{b}_s = \beta_s,$$

并且

$$A[G] = A[G]b_1 \oplus \cdots \oplus A[G]b_s$$

给出了 $A[G]$ 的不可分解双边理想的分解, 每个 $A[G]b_i$ 是不可分解的双边理想, 并且 $A[G]$ 的这个分解是唯一的.

设 $\{Z_1, \cdots, Z_h\}$ 是单 $K[G]$-模的同构类的代表元集, 则每个 Z_i 在某个直和项 $K[G]b_j$ 中. 如果 $Z_i \subset K[G]b_j$, 那么 b_j 在 Z_i 上相当于恒等映射, 从而 β_j 在 $\bar{Z}_i = Z_i/\mathfrak{m}Z_i$ 上也相当于恒等映射. 特别, β_j 在 $\bar{Z}_i$ 的每个 $k[G]$-合成因子 E_t 上相当于恒等映射, 这里我们把单 $K[G]$-模 Z_i 的 $A[G]$-格仍记作 Z_i. 因为 $k[G]f_t \subset B_j$ 当且仅当 $\beta_j k[G] f_t \neq 0$, 所以 $P_{E_t} \subset B_j$. 这时我们说 E_t 属于 B_j, 也说 Z_i 属于 B_j, 分别记作 $E_t \in B_j$ 或 $Z_i \in B_j$.

把前面所证明的结果归纳起来, 得到

定理 4.3 (1) 模 $\mathfrak{m}$ 约化定义了满同态 $Z(A[G]) \longrightarrow Z(k[G])$，在这个同态下 $b_i \to \bar{b}_i = \beta_i (1 \leqslant i \leqslant s)$ 给出 $A[G]$ 的块幂等元集合与 $k[G]$ 的块幂等元集合之间的双射；

(2) $k[G]$ 中每个块 $B_i = k[G]\beta_i$ 是不可分解双边理想，它是属于同一个连结类的射影不可分解 $k[G]$-模的直和. 于是，两个射影不可分解 $k[G]$-模是连结的当且仅当它们属于 G 的同一个 p-块，并且 $k[G]$ 的任意两个块都没有公共的合成因子；

(3) 设 $\{Z_1, \cdots, Z_h\}$ 是单 $K[G]$-模同构类的代表元集，对每个 $Z_i (1 \leqslant i \leqslant h)$ 存在 $k[G]$ 的块 B_j 使得 Z_i 的全部 $k[G]$-合成因子属于 B_j. ▌

利用 G 的分块，可以重排 G 的常特征标表和 Brauer 特征标表，使得对应的分解矩阵 D 与 Cartan 矩阵 C 是分块对角矩阵.

设 χ 是 $K[G]$ 的不可约线性表示的特征标，由第二章 §3 可以定义一个 K-代数同态

$$\omega: Z(K[G]) \to K,$$

对每个 $u = \sum_{x \in G} u(x) x \in Z(K[G])$ 有

$$\omega(u) = \frac{1}{n} \sum_{x \in G} u(x) \chi(x),$$

其中 n 是不可约特征标 χ 的次数，并且把 ω 称为 $K[G]$ 的**中心特征标**. 由第二章推论 3.7，$\omega(e_i) \in A \quad (1 \leqslant i \leqslant h)$，因此 ω 也定义了一个 A-线性映射

$$\omega: Z(A[G]) \to A,$$

从而定义了一个 k-线性映射

$$\bar{\omega}: Z(k[G]) \to k,$$

使得

$$\bar{\omega}(e_i) = \overline{\omega(e_i)} = \overline{\frac{1}{n} \sum_{x \in \mathfrak{C}_i} \chi(x)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant h.$$

由于

$$e_ie_j = \sum_{k=1}^{h} c_{ijk}e_k,$$

其中 c_{ijk} 等于集合 $\{(x,y)\mid x\in\mathfrak{C}_i, y\in\mathfrak{C}_j, xy\in\mathfrak{C}_k\}$ 所含元素的个数,并且

$$\omega(e_i)\omega(e_j) = \sum_{k=1}^{h} c_{ijk}\omega(e_k),$$

$$\bar{\omega}(e_i)\bar{\omega}(e_j) = \sum_{k=1}^{h} c_{ijk}\bar{\omega}(e_k),$$

因此 $\bar{\omega}$ 是一个 k-代数同态,也称为 $k[G]$的中心特征标. 对于 G 的每个 p-块 B_j,定义 $k[G]$的中心特征标 $\psi_j: Z(k[G])\to k$ 使得

$$\psi_j(\beta_i) = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,\cdots,s.$$

进一步的细节可参考[CR3]p. 416 与 p. 418. 现在设 χ 对应的单 $K[G]$-模是 Z,$B_i = k[G]\beta_i$ 是 $k[G]$的块,则 Z 属于 B_i 当且仅当 b_i 在 Z 上相当于恒等映射,这等价于

$$\omega(b_i) = 1, \quad \omega(b_j) = 0, \quad j\neq i.$$

这样我们已经证明了下述命题的第一部分.

命题 4.4 设 Z 与 Z'是两个单 $K[G]$-模,ω 与 ω'是对应的 $K[G]$的中心特征标,则 Z 与 Z'属于 $k[G]$的同一块的充分必要条件是 $\bar{\omega}=\bar{\omega}'$. 又设 χ 与 χ'是 Z 与 Z'的特征标,则 Z 与 Z'属于 $k[G]$的同一块的充分必要条件是对于 G 的每个共轭类 $\mathfrak{C}$ 及某个 $x\in\mathfrak{C}$,有

$$\frac{|\mathfrak{C}|\chi(x)}{\chi(1)} \equiv \frac{|\mathfrak{C}|\chi'(x)}{\chi'(1)} (\text{mod m}).$$

证明 为了证明命题的第二部分,只要用第二章命题 3.3 就可以了. ∎

设 $S_k=\{Z_1,\cdots,Z_h\}$是单 $K[G]$-模同构类的代表元集,它们的特征标分别是$\{\chi_1,\cdots,\chi_h\}$,使得最前面的 x_1 个属于块 B_1,其次的 x_2 个属于块 B_2,…,最后的 x_s 个属于块 B_s,并且设 χ_1 是单位表示的特征标. 又设 $S_k=\{E_1,\cdots,E_r\}$是单 $k[G]$-模的同构类的代表元集,它们的 Brauer 特征标分别是$\{\varphi_1,\cdots,\varphi_r\}$,$\{P_{E_1},\cdots,P_{E_r}\}$是射影

不可分解 $k[G]$-模的集合，它们的 Brauer 特征标分别是$\{\eta_1,\cdots,\eta_r\}$. 对任意的块幂等元 $\beta\in k[G]$, $\beta P_{E_i}\neq 0$ 当且仅当 $\beta E_i\neq 0$，所以单 $k[G]$-模集合 S_k 与射影不可分解 $k[G]$-模的集合$\{P_{E_1},\cdots,P_{E_r}\}$的编排次序是一致的. 设最前面的 y_1 个射影不可分解 $k[G]$-模是 B_1 的直和项，其次的 y_2 个是 B_2 的直和项，…，最后的 y_s 个是 B_s 的直和项.

当 $Z_j\in B_i$ 时，β_i 是 B_i 对应的块幂等元，考虑 Z_j 的 $A[G]$-格 M_j, b_i 在 M_j 上相当于恒等映射，从而 β_i 在 $\overline{M}_j$ 上相当于恒等映射，于是 $\overline{M}_j$ 的全部合成因子属于 B_i. 回忆一下

$$d: R_K(G)\to R_k(G)$$

是分解同态，它定义为

$$d([Z_j])=\sum_{j=1}^{r}d_{ij}[E_i].$$

根据我们的编序方法有

$$D=(d_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ 1\leqslant j\leqslant h}}=\begin{pmatrix} D^{(1)}_{y_1\times x_1} & & & \\ & D^{(2)}_{y_2\times x_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & D^{(s)}_{y_s\times x_s}\end{pmatrix},$$

其中 $D^{(i)}_{y_i\times x_i}$是 $y_i\times x_i$-矩阵，$1\leqslant i\leqslant s$. 由于 $C=DE=DD^{\mathrm{T}}$，因此 Cartan矩阵 C 也是分块对角矩阵，

$$C=\begin{pmatrix} C^{(1)}_{y_1\times y_1} & & & \\ & C^{(2)}_{y_2\times y_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & C^{(s)}_{y_s\times y_s}\end{pmatrix},$$

其中 $C^{(i)}_{y_i\times y_i}$是 $y_i\times y_i$-矩阵，并且 $C^{(i)}=D^{(i)}(D^{(i)})^{\mathrm{T}}$, $1\leqslant i\leqslant s$.

习　题

1. 设 $B=k[G]\beta$ 是 G 的一个 p-块，b 是 $A[G]$中对应的正交

中心幂等元. 证明：b 可以写成第二章 §3 习题 1 所定义的 $K[G]$ 的中心幂等元的和，即

$$b = \sum_{\chi_i \in B} p_i = \sum_{\chi_i \in B} \sum_{x \in G} \frac{n_i}{|G|} \overline{\chi_i(x)} x.$$

2. 设 $\mathfrak{C}_1, \cdots, \mathfrak{C}_h$ 是 G 的共轭类，定义

$$e_i = \sum_{x \in \mathfrak{C}_i} x, \quad e_i e_j = \sum_{k=1}^{h} c_{ijk} e_k, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant h.$$

证明：非负整数的集合 $\{c_{ijk}\}$ 满足下述关系：

(1) $c_{ijk} = c_{jik}$;

(2) $\sum_{i=1}^{h} c_{ijk} = c_j = |\mathfrak{C}_j|$;

(3) 若 $\mathfrak{C}_{i^{-1}} = \{x^{-1} | x \in \mathfrak{C}_i\}$, $h_i = \frac{|G|}{c_i}$，则 $c_{ijk} = \frac{h_k}{h_j} c_{i^{-1}kj}$;

(4) 当 $h_j < h_k$ 时，$p | c_{ijk}$，从而 $e_i e_j \equiv \sum_{k=1}^{h} c_{ijk} e_k (\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}[G])$.

§5 块的亏数与亏群

同上节一样，设 (K, A, k) 是一个 p-模系统，并且假定 K 包含全部 m 次单位根，其中 m 是群 G 的元素的阶的最小公倍数. 对 G 的每个 p-块，我们将定义一个非负整数 d，称为这个块的**亏数**，这是由 Brauer-Nesbitt 首先引入的，它刻画了 p-块中不可约常特征标的次数与块幂等元之间的关系. 然后，我们将定义一个 p^d 阶子群，称为这个块的**亏群**. 除非另外说明，我们保持前面的记号不变.

设 $n_i = \dim_K Z_i = \chi_i(1)$, $m_j = \dim_k E_j = \varphi_j(1)$, $u_j = \dim_k P_{E_j} = \eta_j(1)$, $1 \leqslant i \leqslant h$, $1 \leqslant j \leqslant r$. 又设 $|G| = p^a l$, $(p, l) = 1$，则 $|G|$ 的 p-adic 赋值 $\nu_p(|G|) = a$，并且有 $\nu_p\left(\frac{a}{b}\right) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$, $a, b \in \mathbf{Z}$, $b \neq 0$.

定义 5.1 G 的 p-块 B_j 的亏数是一个整数

$$d_j = a - \min\{\nu_p(n_i) | Z_i \in B_j\}.$$

由第二章推论 3.8，每个 n_i 是 $|G|$ 的因子，因此 $d_j \geqslant 0$ 是非负整数. 人们自然要问，什么时候 G 的 p-块的亏数为零，什么时候 G 的 p-块的亏数最高，即 $d=\alpha$. 对于后者，显然 G 的包含平凡模的主块是一个亏数为 α 的 p-块.

命题 5.2 设 B_j 是 G 的一个亏数为零的 p-块，则 B_j 恰好包含一个单 $K[G]$-模 Z，一个单 $k[G]$-模 E 及一个射影不可分解 $k[G]$-模 P_E，并且在 Cartan 矩阵 C 与分解矩阵 D 中对应的

$$D^{(j)}=(1),\quad C^{(j)}=(1).$$

证明 设 Z 是属于 B_j 的单 $K[G]$-模，由第二章 § 3 习题 1，

$$q=\frac{\chi(1)}{|G|}\sum_{x\in G}\chi(x^{-1})x\in K[G]$$

是对应的中心幂等元，其中 χ 是 Z 的特征标. 因为 B_j 的亏数是零，$\left(p,\dfrac{|G|}{\chi(1)}\right)=1$，所以 $q\in A[G]$. 由本章 § 4 习题 1，Z 是仅有的属于 B_j 的单 $K[G]$-模.

存在射影不可分解 $A[G]$-模 Q_i，它的模 m 约化是 P_{E_i}，使得 Z 是 $K\otimes_A Q_i$ 的 $K[G]$-直和项. 设 $K\otimes_A Q_i$ 的特征标是 Φ_i，则 $\Phi_i=a\chi$，$a\in N$，并且 $qQ_i\neq 0$，从而 $qQ_i=Q_i$. 由命题 3.7(2)，Φ_i 在 G 的 p-奇异元素处的值为零，从而 χ 也在 G 的 p-奇异元素处的值为零. 但是由命题 3.7(3)，$\chi=\sum_{j=1}^{r}a_j\Phi_j$，$a_1,\cdots,a_r\in \mathbf{Z}$，因此 $\Phi_i=a\chi=\sum_{j=1}^{r}aa_j\Phi_j$，从而 $\chi=\Phi_i$. 于是

$$qA[G]=Q_i\oplus\cdots\oplus Q_i,\quad \bar{q}k[G]=P_{E_i}\oplus\cdots\oplus P_{E_i},$$

因为 $B_j=\bar{q}k[G]$ 只包含一个射影不可分解 $k[G]$-模 P_{E_i}，所以 B_j 只包含一个单 $k[G]$-模 E_i.

由于 $[Z]=[K\otimes_A Q_i]$，由命题 3.7(1)，$\chi=\Phi_i=\sum_{j=1}^{h}d_{ij}\chi_j$，设 $Z=Z_l$，则 $d_{il}=1$，$d_{im}=0$，$m\neq l$. 因为块 B_j 只含一个单 $k[G]$-模，所以在分解矩阵 D 中，对应的 $D^{(j)}=(1)$，从而 $C^{(j)}=(1)$，并且 P_{E_i} 是

一个单 $k[G]$-模,即 $P_{E_i}=E_i$. ∎

由此可见,亏数为零的 p-块 B_j 所含的那个唯一的单 $K[G]$-模 Z,单 $k[G]$-模 E_i 与射影不可分解 $k[G]$-模 P_{E_i} 的维数是相等的,即

$$\dim_K Z = \dim_k E_i = \dim_k P_{E_i}.$$

我们还可以用单 $k[G]$-模的维数来描述块的亏数.

命题 5.3 群 G 的 p-块 B_j 的亏数 $d_j=\alpha-\min\{\nu_p(m_i)\mid E_i\in B_j\}$.

证明 因为 $C=DD^{\mathrm{T}}$,$\det(C)\neq 0$,所以矩阵 D 的秩是 r,从而 $D^{(j)}$的秩是 y_j. 但是

$$\chi_i|_{G_{\mathrm{reg}}} = \sum_{m=1}^{r} d_{mi}\varphi_m, \quad 1\leqslant i\leqslant h.$$

设 $\chi_{j1},\cdots,\chi_{jx_j}\in B_j$,$\varphi_{j1},\cdots,\varphi_{jy_j}\in B_j$,则对每个 $x\in G_{\mathrm{reg}}$,有

$$(\chi_{j1}(x),\cdots,\chi_{jx_j}(x)) = (\varphi_{j1}(x),\cdots,\varphi_{jy_j}(x))D^{(j)},$$

从而

$$(n_{j1},\cdots,n_{jx_j}) = (m_{j1},\cdots,m_{jy_j})D^{(j)}.$$

于是我们得到$(n_{j1},\cdots,n_{jx_j})$的最大公因子的 p-adic 赋值等于$(m_{j1},\cdots,m_{jy_j})$的最大公因子的 p-adic 赋值,因此

$$\alpha-d_j=\min\{\nu_p(n_i)\,|\,Z_i\in B_j\}=\min\{\nu_p(m_i)\mid E_i\in B_j\}. \quad ∎$$

我们定义 G 的 p-正则元素的共轭类 $\mathfrak{C}_j$ 的**亏数** $\delta_j=\alpha-\nu_p(c_j)$,其中 $c_j=|\mathfrak{C}_j|$,显然 δ_j 是非负整数. 设 $x\in\mathfrak{C}_j$,由 $|G|=c_j|Z_G(x)|$,有 $\delta_j=\nu_p(|Z_G(x)|)$. 于是可以定义 $\mathfrak{C}_j$ 的**亏群**是$Z_G(x)$的一个 Sylow p-子群 H_j.

由本章 § 4 习题 1,$A[G]$的中心幂等元 b_j 可以写成

$$b_j=\sum_{\chi_i\in B_j}p_i=\sum_{\chi_i\in B_j}\sum_{x\in G}\frac{\chi_i(1)}{|G|}\chi_i(x^{-1})x$$

$$=\sum_{\chi_i\in B_j}\sum_{l=1}^{h}\frac{n_i}{|G|}\overline{\chi_i(\mathfrak{C}_l)}e_l=\sum_{l=1}^{h}b_{jl}e_l,$$

其中

$$b_{jl}=\sum_{\chi_i\in B_j}\frac{n_i}{|G|}\overline{\chi_i(\mathfrak{C}_l)}.$$

当 $\mathfrak{C}_l$ 是 p-正则元素的共轭类时，由于

$$\chi_i(\mathfrak{C}_l)=\sum_{\varphi_m\in B_j}d_{mi}\varphi_m(\mathfrak{C}_l),$$

由命题 3.7(1)，有

$$u_m=\sum_{\chi_i\in B_j}d_{mi}n_i,$$

因此

$$b_{jl}=\sum_{\chi_i\in B_j}\frac{n_i}{|G|}\sum_{\varphi_m\in B_j}d_{mi}\overline{\varphi_m(\mathfrak{C}_l)}=\sum_{\varphi_m\in B_j}\frac{u_m}{|G|}\overline{\varphi_m(\mathfrak{C}_l)}.$$

引理 5.4 设 $x\in G$ 是 p-奇异元素，$y\in G$ 是 p-正则元素，则

$$\sum_{\chi_i\in B_j}\chi_i(x)\chi_i(y)=0.$$

证明 由§3 及第二章命题 2.10(2)，有

$$(\overline{\chi_1(x)},\cdots,\overline{\chi_h(x)})X=0,$$

其中 $X=D^{\mathrm{T}}\Phi$，Φ 是可逆矩阵. 因此

$$(\chi_1(x),\cdots,\chi_h(x))D^{\mathrm{T}}=0.$$

由于 $D=\mathrm{diag}(D^{(1)},\cdots,D^{(s)})$ 是分块对角矩阵，我们有

$$\sum_{\chi_i\in B_j}\chi_i(x)d_{mi}=0.$$

两边同乘以 $\varphi_m(y)$ 并对所有使 $\varphi_m\in B_j$ 的 m 求和，有

$$\sum_{\varphi_m\in B_j}\sum_{\chi_i\in B_j}\chi_i(x)d_{mi}\varphi_m(y)=\sum_{\chi_i\in B_j}\chi_i(x)\chi_i(y)=0.\quad ▌$$

命题 5.5 (1) 当 $\mathfrak{C}_l$ 是 p-奇异元素的共轭类时，$b_{jl}=0$；

(2) 当 $\mathfrak{C}_l$ 是 p-正则元素的共轭类并且其亏数 $\delta_l>d_j$ 时，$\bar{b}_{jl}=0$.

证明 由引理 5.4，令 $y=1$ 即有 $\sum_{\chi_i\in B_j}n_i\chi_i(x)=0$，这证明了 (1). 为了证明(2)，我们只要证明 $b_{jl}\in\mathfrak{m}$. 当 $\chi_i\in B_j$ 时，

$$\omega_i(e_l) = \frac{c_l}{n_i}\chi_i(\mathfrak{C}_l) \in A,$$

并且

$$\nu_p\left(\frac{n_i}{c_l}\right) = \nu_p(n_i) - \nu_p(c_l) \geqslant (\alpha - d_j) - (\alpha - \delta_l)$$
$$= \delta_l - d_j > 0,$$

因此 $\chi_i(\mathfrak{C}_l)\in\mathfrak{m}$. 但是 $D^{(j)}$ 的秩是 y_j, $X=D^{\mathrm{T}}\Phi$, 所以当 $\varphi_m\in B_j$ 时, $\varphi_m(\mathfrak{C}_l)\in\mathfrak{m}$. 又由本节习题 1, $\nu_p\left(\frac{u_m}{|G|}\right)\geqslant 0$, 因此 $\frac{u_m}{|G|}\in A$, 从而

$$b_{jl} = \frac{1}{|G|}\sum_{\varphi_m\in B_j} u_m \overline{\varphi_m(\mathfrak{C}_l)} \in \mathfrak{m}. \quad \blacksquare$$

推论 5.6 $k[G]$的每个块 B_j 包含一个射影不可分解 $k[G]$-模 P_{E_m} 使得 $\nu_p(u_m)=\alpha$.

证明 若对每个 $P_{E_m}\in B_j$ 有 $\nu_p(u_m)>\alpha$, 则 $\nu_p\left(\frac{u_m}{|G|}\right)>0$, 从而对每个 p-正则元素共轭类 $\mathfrak{C}_l$ 有 $\bar{b}_{jl}=0$. 于是 $\beta_j=0$, 这是不可能的. $\blacksquare$

考虑 $K[G]$的中心特征标 $\omega_k(1\leqslant k\leqslant h)$, 由于

$$\omega_k(b_j) = \sum_{l=1}^{h} b_{jl}\,\omega_k(e_l) = \sum_{\chi_i\in B_j}\frac{n_i}{n_k}\left(\sum_{l=1}^{h}\frac{c_l}{|G|}\overline{\chi_i(\mathfrak{C}_l)}\chi_k(\mathfrak{C}_l)\right),$$

由第二章定理 2.4 及命题 2.10, 有

$$\omega_k(b_j) = \begin{cases}1, & \text{当 } Z_k \in B_j \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } Z_k \notin B_j \text{ 时}.\end{cases}$$

从而由命题 5.5, 有

$$\sum_{l=1}^{r}\bar{b}_{jl}\,\overline{\omega_k(e_l)} = \begin{cases}1, & \text{当 } Z_k \in B_j \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } Z_k \notin B_j \text{ 时}.\end{cases}$$

对 G 的每个 p-块 B_j, 考虑 $k[G]$的中心特征标 $\psi_j: Z(k[G])\to k$, 由于 $Z_k\in B_j$ 当且仅当 $\bar{\omega}_k=\psi_j$, 因此

$$\sum_{l=1}^{r}\bar{b}_{jl}\,\psi_i(e_l) = \begin{cases}1, & \text{当 } i = j \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } i \neq j \text{ 时}.\end{cases}$$

从而 $Z_k \in B_j$ 当且仅当 $\sum_{l=1}^{r} \bar{b}_{jl} \overline{\omega_k(e_l)} = 1$.

定理 5.7 设 B_j 是 G 的亏数为 d_j 的 p-块使得 $B_j = k[G]\beta_j$，则

(1) $\psi_j(\beta_j) = \sum_{\substack{l=1 \\ \delta_l = d_j}}^{r} \bar{b}_{jl}\, \psi_j(e_l) = 1$;

(2) $\beta_j = \sum_{\substack{l=1 \\ \delta_l \leqslant d_j}}^{r} \bar{b}_{jl}\, e_l$;

(3) 对某个亏数为 d_j 的 p-正则元素共轭类 $\mathfrak{C}_l$ 有 $\psi_j(\bar{b}_{jl} e_l) \neq 0$.

证明 由命题 5.5，并注意到 $\beta_j = \sum_{l=1}^{h} \bar{b}_{jl} e_l$，我们就有(2)成立；从而只要证明 $\delta_l < d_j$ 时，$\psi_j(e_l) = 0$. 取 $Z_i \in B_j$ 使得 $\nu_p(n_i) = \alpha - d_j$，则 $\tilde{\omega}_i = \psi_j$，并且

$$\omega_i(e_l) = \frac{c_l}{n_i} \chi_i(\mathfrak{C}_l).$$

但是

$$\begin{aligned} \nu_p\left(\frac{c_l}{n_i}\right) &= \nu_p(c_l) - \nu_p(n_i) = (\alpha - \delta_l) - (\alpha - d_j) \\ &= d_j - \delta_l > 0, \end{aligned}$$

因此 $\omega_i(e_l) \in \mathfrak{m}$，即 $\psi_j(e_l) = \overline{\omega_i(e_l)} = 0$. ▌

推论 5.8 单 $K[G]$-模 Z_i 属于亏数为 d 的 p-块 B 的充分必要条件是：

(1) 只要 $\delta_l < d$，就有 $\omega_i(e_l) \in \mathfrak{m}$，$1 \leqslant l \leqslant r$；

(2) 对某个亏数为 d 的 p-正则元素共轭类 $\mathfrak{C}_l$，$\omega_i(e_l) \notin \mathfrak{m}$.

证明 用定理 5.7. ▌

最后我们讨论群 G 的 p-块的亏群.

定义 5.9 设 B_j 是群 G 的亏数为 d_j 的 p-块，它对应 G 的一个亏数为 d_j 的 p-正则元素共轭类 $\mathfrak{C}_l$ 使得 $\bar{b}_{jl}\psi_j(\mathfrak{C}_l) \neq 0$，则 $\mathfrak{C}_l$ 的亏

群就称为 p-块 B_j 的亏群.

因为 Sylow 定理(第一章定理 1.14)告诉我们,$Z_G(x)$的全部 Sylow p-子群是互相共轭的,并且当 x 与 x' 在 G 中共轭时,$Z_G(x)$ 与 $Z_G(x')$也是互相共轭的,所以共轭类 $\mathfrak{C}_i$ 的亏群 H_i 在共轭的意义下是唯一确定的. 但是,群 G 的每个 p-块的亏群在共轭的意义下是唯一确定的,就不是那么显然的事情了.

设 $H<G$ 是群 G 的子群,我们先讨论 G 的 p-块与 $N_G(H)$的 p-块之间的关系. 令

$$e_i' = \sum_{x\in\mathfrak{C}_i\cap Z_G(H)} x, \quad 1\leqslant i\leqslant h,$$

并且定义

$$Z(k[G])' = \bigoplus_{i=1}^{h} ke_i'.$$

由本节习题 3,$Z(k[G])'$是 $Z(k[N_G(H)])$的子环,并且 $e_i\to e_i'$ 定义了 k-代数同态

$$Z(k[G]) \to Z(k[G])',$$

它的核是

$$T = \bigoplus_{e_i'=0} ke_i,$$

使得

$$Z(k[G])' = Z(k[G])/T.$$

又设

$$k[N_G(H)] = \widetilde{B}_1 \oplus \cdots \oplus \widetilde{B}_t$$

使得 $\widetilde{B}_i=k[N_G(H)]\widetilde{\beta}_i$,其中 $\widetilde{\beta}_1,\cdots,\widetilde{\beta}_t$ 是 $k[N_G(H)]$的块幂等元. 令 $\widetilde{\psi}_1,\cdots,\widetilde{\psi}_t$ 是 k-线性映射

$$Z(k[N_G(H)]) \to k$$

使得

$$\widetilde{\psi}_j(\widetilde{\beta}_i) = \delta_{ij}, \quad i,j=1,\cdots,t.$$

注意到在同态 $Z(k[G])\to Z(k[G])'$下,$k[G]$的中心幂等元 β_i

的像 β_i' 可能等于零，但是非零的 β_i' 是 $Z(k[N_G(H)])$ 的中心幂等元，它们两两正交，可以唯一地写成某些 $\tilde{\beta}_j$ 的和. 这时，我们说 β_i 支配 $\tilde{\beta}_j$，记作 $\tilde{\beta}_j<\beta_i$ 或 $\beta_i>\tilde{\beta}_j$. 因为 $\beta_i'=0$ 当且仅当 $\beta_i\in T$，所以 $\beta_i>\tilde{\beta}_j$ 当且仅当 $\tilde{\psi}_j(\beta_i')=1$.

引理 5.10 $\tilde{\beta}_j<\beta_i$ 当且仅当 $\tilde{\psi}_j(e_k')=\psi_i(e_k)$，$1\leqslant k\leqslant h$.

证明 若 $\tilde{\psi}_j(e_k')=\psi_i(e_k)$ 对所有 k 成立，则由定理 5.7(1)有 $\tilde{\psi}_j(\beta_i')=\psi_i(\beta_i)=1$，从而 $\tilde{\beta}_j<\beta_i$. 反之，由于 θ： $Z(k[G])\to k$ 可通过

$$Z(k[G])\to Z(k[G])'=Z(k[G])/T\xrightarrow{\tilde{\psi}_j}k$$

来定义，迫使 θ 等于某个 ψ_l. 但是 $\tilde{\psi}_j(\beta_i')=1$. 因此

$$\psi_l(\beta_i)=\tilde{\psi}_j(\beta_i')=1,$$

从而 $l=i$，并且 $\psi_i(e_k)=\tilde{\psi}_j(e_k')$ 对所有 k 成立. ▌

推论 5.11 $\beta_i'=0$ 当且仅当对某个使 $e_l'=0$ 的共轭类 $\mathfrak{C}_l$，有 $\psi_i(e_l)\neq 0$.

证明 若 $\beta_i'\neq 0$，则 $\beta_i>\beta_j'$ 对某个 j 成立，因此只要 $e_l'=0$ 就有 $\psi_i(e_l)=\tilde{\psi}_j(e_l')=0$. 反之，若 $\beta_i'=0$，由于

$$\beta_i'=\sum_{l=1}^{h}\bar{b}_{il}e_l'=0,$$

则 $e_l'\neq 0$ 时必有 $\bar{b}_{il}=0$. 因此

$$\beta_i=\sum_{l=1}^{h}\bar{b}_{il}e_l=\sum_{\substack{l=1\\ e_l'=0}}^{h}\bar{b}_{il}e_l,$$

并且

$$1=\psi_i(\beta_i)=\sum_{\substack{l=1\\ e_l'=0}}^{h}\bar{b}_{il}\psi_i(e_l).$$

所以至少有一个 l，虽然 $e_l'=0$ 但 $\psi_i(e_l)\neq 0$. ▌

定理 5.12 设 H_k 是块 B_j 的亏群，则 $\bar{b}_{jl}\neq 0$ 时必有 $H_l\subseteq_c H_k$，

即 H_l 包含在 H_k 的共轭 $xH_kx^{-1}={}^xH_k$ 内，某个 $x\in G$.

证明 设若不然，由本节习题 3，$e_k'=0$. 由定理 5.7(3)，$\psi_j(e_k)\neq 0$. 又由推论 5.11，$\beta_j'=0$ 并且当 $e_m'\neq 0$ 时必有 $\bar{b}_{jm}=0$. 但是由本节习题 3，一定有 $e_l'\neq 0$. 于是 $\bar{b}_{jl}=0$，这是一个矛盾. ▌

推论 5.13 (1) 在共轭的意义下，群 G 的 p-块的亏群是唯一的；

(2) 设 H_k 是块 B_j 的亏群，则

$$\beta_j=\sum_{\substack{l=1\\ H_l\subsetneq_c H_k}}^{r}\bar{b}_{jl}e_l \quad 且 \sum_{\substack{l=1\\ H_l=_c H_k}}^{r}=\bar{b}_{jl}\psi_j(e_l)=1;$$

(3) 设 H_k 是块 B_j 的亏群，又设 B_j 的亏数是 d_j，B_i 是亏数也为 d_j 的块，若 $\sum\limits_{\substack{l=1\\ H_l=_c H_k}}^{r}\bar{b}_{jl}\psi_i(e_l)=1$，则 $i=j$；

(4) 设 H_k 是块 B_j 的亏群，则 $\psi_j(e_l)\neq 0$ 时 $H_k\subseteq_c H_l$. ▌

我们把证明作为练习留给读者，读者也可以参考[CR1]p. 623～625.

习 题

1. 设 u_i 是射影不可分解 $k[G]$-模 P_{E_i} 的维数，证明：u_i 是 p^a 的倍数，从而 $\nu_p(u_i)\geqslant\alpha=\nu_p(|G|)$，$1\leqslant i\leqslant r$.

2. 设 H_k 是共轭类 $\mathfrak{C}_k$ 的亏群，H_j 是共轭类 $\mathfrak{C}_j$ 的亏群. 记号 $H_k\subsetneq_c H_j$ 表示 H_k 包含在 H_j 的某个共轭 $xH_jx^{-1}={}^xH_j$ 内，$x\in G$. 证明

$$e_ie_j\equiv\sum_{\substack{k=1\\ H_k\subsetneq_c H_j}}^{h}c_{ijk}e_k(\operatorname{mod}\ \mathfrak{m}[G]).$$

3. 设 H 是 G 的 p-子群，$N_G(H)$ 是 H 的正规化子，$Z_G(H)$ 是 H 的中心化子. 定义

$$e_i'=\begin{cases}\sum\limits_{x\in\mathfrak{C}_i\cap Z_G(H)}x, & 当\ \mathfrak{C}_i\cap Z_G(H)\neq\varnothing\ 时,\\ 0, & 当\ \mathfrak{C}_i\cap Z_G(H)=\varnothing\ 时,\end{cases}$$

证明：(1) 当 $x\in Z_G(H)$，$y\in N_G(H)$时，$y^{-1}xy\in Z_G(H)$，从而子群的积 $HZ_G(H)$是 $N_G(H)$的正规子群；

(2) $e_i'\neq 0$ 当且仅当 $H\subseteq_c H_i$；

(3) 当 H 是共轭类 $\mathfrak{C}_i$ 的亏群时，$e_i'\neq 0$；

(4) $e_i'e_j'=\sum_{k=1}^{h}c_{ijk}e_k'(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}[G])$；

(5) $\mathfrak{C}_i\cap Z_G(H)$是 $N_G(H)$中共轭类的并集，从而 e_i' 在群代数 $k[N_G(H)]$的中心内；特别，当 H 是共轭类 $\mathfrak{C}_i$ 的亏群时，$\mathfrak{C}_i\cap Z_G(H)$恰好是 $N_G(H)$中的一个共轭类.

4. 设 Z_i 是一个单 $K[G]$-模，ω_i 是相应的中心特征标，又设 B_j 是 G 的一个 p-块，ψ_j 是相应的中心特征标. 证明：$Z_i\in B_j$ 当且仅当 $\overline{\omega}_i=\psi_j$.

5. 证明推论 5.13.

6. 设 ω： $Z(K[G])\to K$ 是 $K[G]$的一个中心特征标，对应的不可约 K-特征标是 χ，则 χ 属于主块的充分必要条件是

$$\omega(e_i)\equiv|\mathfrak{C}_i|(\mathrm{mod}\ p),1\leqslant i\leqslant h.$$

第四章　拓扑群及其线性表示

我们已经介绍了有限群的常表示与模表示的基本内容，考虑到不同背景的读者的需要，我们将简要地介绍有关拓扑群及其表示理论的必要知识. 本章要求读者具有基本的拓扑学知识，对所引用的拓扑方面的内容，我们将在附录中列出以便读者查阅.

§1　拓　扑　群

赋予一个群某种拓扑结构，就形成了拓扑群的概念，它最初是研究欧氏空间上连续变换的群引起的.

定义 1.1　设 G 是一个**拓扑空间**，赋予 G 群的结构，使得群的乘法运算

$$\mu: G\times G\rightarrow G$$

及求逆运算

$$\iota: G\rightarrow G$$

是拓扑空间的**连续映射**，就称 G 为**拓扑群**.

定义 1.2　设 G 与 G' 是拓扑群，若群同态

$$\varphi: G\rightarrow G'$$

也是拓扑空间的连续映射，则 φ 称为**拓扑群的同态**. 若 φ 的逆映射存在且也是拓扑群的同态，则 φ 称为**拓扑群的同构**.

例 1　(1) 实数域 $\boldsymbol{R}$ 与复数域 $\boldsymbol{C}$ 关于加法和通常的距离拓扑是拓扑群；非零实数域 $\boldsymbol{R}^*$ 与非零复数域 $\boldsymbol{C}^*$ 关于乘法和通常的距离拓扑是拓扑群.

(2) $\boldsymbol{R}^n$ 关于向量加法和距离拓扑是拓扑群.

(3) 任意一个群 G 关于离散拓扑是拓扑群.

(4) 平面上绕定点 O 的旋转 r_α 所组成的群 C_∞ 是一个拓扑群，其中 r_α 表示绕定点 O 按逆时针方向旋转 α 角由模 2π 确定，$\alpha \in \boldsymbol{R}$.

(5) 有理数域 $\boldsymbol{Q}$ 关于加法和 p-adic 拓扑是拓扑群. $\boldsymbol{Q}$ 中的 p-adic 拓扑是这样定义的：回忆起 $x = p^r \dfrac{m}{n} \in \boldsymbol{Q}$，$(mn, p) = 1$，定义 $\varphi_p(x) = p^{-r}$ 及 $\varphi_p(0) = 0$，使 φ_p 是 $\boldsymbol{Q}$ 上 p-adic 赋值，再定义距离 $d(x, y) = \varphi_p(x - y)$，得到的距离拓扑就是 p-adic 拓扑.

(6) G 是拓扑群，G 的子群 H 关于子空间的诱导拓扑是拓扑群.

(7) 复数域 $\boldsymbol{C}$ 上 $n \times n$-可逆矩阵所成的**一般线性群** $GL_n(\boldsymbol{C})$ 是一个拓扑群. 类似的，$GL_n(\boldsymbol{R})$ 也是个拓扑群，并且它们的子群也都是拓扑群，例如

特殊线性群 $SL_n(\boldsymbol{R}) = \{A \in GL_n(\boldsymbol{R}) \mid \det(A) = 1\}$ 及 $SL_n(\boldsymbol{C})$；

正交群 $O_n(\boldsymbol{R}) = \{A \in GL_n(\boldsymbol{R}) \mid AA^{\mathrm{T}} = I\}$ 及 $O_n(\boldsymbol{C})$；

辛群 $Sp_{2n}(\boldsymbol{R}) = \{A \in GL_n(\boldsymbol{R}) \mid AHA^{\mathrm{T}} = H\}$ 及 $Sp_{2n}(\boldsymbol{C})$，其中

$$H = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad I \text{ 是 } n \text{ 阶单位矩阵；}$$

上三角矩阵所成的子群 $B_n(\boldsymbol{R})$ 与 $B_n(\boldsymbol{C})$ 及**对角矩阵**所成的子群 $T_n(\boldsymbol{R})$ 及 $T_n(\boldsymbol{C})$.

(8) 复平面上单位圆周 $S^1 \subseteq \boldsymbol{C}^*$，$S^1 = \{x \mid |x| = 1\}$ 关于乘法及 $\boldsymbol{C}^*$ 的子空间拓扑是拓扑群.

(9) 在四维空间中保持二次型 $x^2 + y^2 + z^2 - t^2$ 不变的线性变换全体所成的群叫 **Lorentz 群**. 用矩阵形式来表示的话，这个群与由下述矩阵所成的乘法群同构：

$$G = \left\{ L = (l_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant 4} \,\middle|\, JL^{\mathrm{T}}J = L^{-1} \right\},$$

其中

$$J=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&-1\end{pmatrix}.$$

例 2 (1) 设 G 是 $\boldsymbol{R}$ 关于加法和通常的距离拓扑的拓扑群，G' 是正实数 $\boldsymbol{R}_+^*$ 关于乘法和通常的距离拓扑的拓扑群. 则由 $x\mapsto e^x$ 定义的

$$\varphi: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}_+^*$$

是拓扑群同构.

(2) 由 $x\mapsto e^{i2\pi x}=\cos 2\pi x+i\sin 2\pi x$ 定义的

$$\varphi: \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}^*$$

是拓扑群的连续映射，它的像 $\mathrm{Im}\varphi=S^1$，核 $\mathrm{Ker}\varphi=\boldsymbol{Z}$.

(3) 由 $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\mapsto\cos\theta+i\sin\theta$ $(\theta\in\boldsymbol{R})$ 定义的

$$\varphi: O_2(\boldsymbol{R})\to S^1$$

是拓扑群同构.

首先介绍拓扑群的一些初等性质.

1. 设 $a\in G$ 是任意固定的元素，右乘映射

$$r_a: G\to G,\quad x\mapsto xa,\quad x\in G$$

及左乘映射

$$l_a: G\to G,\quad x\mapsto ax,\quad x\in G$$

是拓扑空间的同胚.

2. 设 G 是拓扑群，A 与 B 是 G 的子集，$a\in G$，若记

$$AB=\{ab\mid a\in A,b\in B\},$$
$$A^{-1}=\{a^{-1}\mid a\in A\},$$

则

(1) A 是开集(或闭集)时，Aa，aA 与 A^{-1} 也是开集(或闭集)；

(2) A 是闭集而 B 是有限集时，AB 与 BA 是闭集；

(3) A 是开集时，AB 与 BA 是开集；

(4) A 与 B 是紧致集时，AB 是紧致集.

注意到 r_a, l_a 与 ι 是拓扑空间的同胚，$AB = \bigcup_{b\in B} Ab$ 与 $BA = \bigcup_{b\in B} bA$，以及 $AB=\mu(A\times B)$，当 A 与 B 是紧致集时，$A\times B$ 是 $G\times G$ 的紧致子集，这些事实表明性质2成立.

3. 拓扑群 G 是**齐性**的，即对任意的 $x,y\in G$，存在 G 的同胚把 x 映到 y.

易见右乘映射 $r_{x^{-1}y}$ 或左乘映射 $l_{yx^{-1}}$ 把 x 映为 y. 由于 G 的齐性，关于 G 的局部性质只要对某个元素验证就够了.

要在 G 上定义拓扑，只要确定开集基，通常是用 G 的恒等元素 1 的**完全邻域组**来构造 G 的开集基的.

命题 1.3 设 Σ^* 是拓扑群 G 的恒等元 1 的完全邻域组，则

(1) 对于 $U,V\in\Sigma^*$，存在 $W\in\Sigma^*$ 使得 $W\subset U\cap V$；

(2) 对于 $U\in\Sigma^*$，存在 $V\in\Sigma^*$ 使得 $VV^{-1}\subset U$；

(3) 对于 $U\in\Sigma^*$ 及 $x\in U$，存在 $V\in\Sigma^*$ 使得 $Vx\subset U$；

(4) 对于 $U\in\Sigma^*$ 及 $x\in G$，存在 $V\in\Sigma^*$ 使得 $x^{-1}Vx\subset U$.

反之，设 G 是一个群，Σ^* 是 G 的一组非空子集的集合，每个子集都含恒等元 1，并且 Σ^* 满足上述性质(1)～(4)，则 G 有且只有一种拓扑使 Σ^* 成为 G 的恒等元 1 的完全邻域组.

证明 (1) 因为 $U\cap V$ 是含 1 的开集，所以存在 $W\in\Sigma^*$ 使得 $W\subset U\cap V$.

(2) 考虑连续映射 $f:G\times G\to G, (x,y)\mapsto xy^{-1}$，由于 $f^{-1}(U)$ 是 $G\times G$ 中开集，且 $(1,1)\in f^{-1}(U)$，因此存在 $A,B\in\Sigma^*$ 使得 $A\times B\subset f^{-1}(U)$. 由(1)，存在 $V\in\Sigma^*$，$V\subset A\cap B$，从而 $V\times V\subset f^{-1}(U)$，即 $VV^{-1}\subset U$.

(3) 因为 Ux^{-1} 是含 1 的开集，所以存在 $V\in\Sigma^*$ 使得 $V\subset Ux^{-1}$，即 $Vx\subset U$.

(4) 考虑连续映射 $f:G\to G, y\mapsto x^{-1}yx$，由于 $f^{-1}(U)$ 是开

集，且 $1\in f^{-1}(U)$，因此存在 $V\in\Sigma^*$ 使得 $V\subset f^{-1}(U)$，即 $x^{-1}Vx\subset U$.

反之，只要证明

$$\Sigma=\{Vx \mid V\in\Sigma^*, x\in G\}$$

是 G 的开集基使得 G 成为拓扑群就可以了，唯一性是显然的.

显然 $G=\bigcup\limits_{\substack{V\in\Sigma^*\\ x\in G}} Vx$. 设 $Vx, Uy\in\Sigma$ 使得 $a\in G$ 同时含在 Vx 与 Uy 中，要证明存在 $Wz\in\Sigma$ 使得 $a\in Wz\subset Vx\cap Uy$，其中 $U,V,W\in\Sigma^*$，$x,y,z\in G$. 由于 $a\in Vx\cap Uy$，有 $a=vx=uy$，其中 $u\in U$，$v\in V$. 由(3)存在 $U',V'\in\Sigma^*$ 使得 $U'u\subset U$，$V'v\subset V$. 于是 $U'a=U'uy\subset Uy$，$V'a=V'vx\subset Vx$. 由(1)存在 $W\in\Sigma^*$ 使得 $W\subset U'\cap V'$，于是 $Wa\subset Vx\cap Uy$. 取 $z=a$，就有 $a\in Wz\subset Vx\cap Uy$. 这表明 Σ 是 G 的开集基.

接着证明 G 在这样定义的拓扑中的运算是连续的，即由 $\varphi(y,z)=yz^{-1}$ 定义的运算 $\varphi: G\times G\to G$ 是连续映射. 为此只要对每个 $Vx\in\Sigma$ 证明 $\varphi^{-1}(Vx)$ 是 $G\times G$ 中的开集. 设 $yz^{-1}=vx$，$v\in V$. 由(3)，存在 $V'\in\Sigma^*$ 使得 $V'v\subset V$. 又由(2)，存在 $U\in\Sigma^*$ 使得 $UU^{-1}\subset V'$. 再由(4)，存在 $W\in\Sigma^*$ 使得 $yz^{-1}Wzy^{-1}\subset U$，从而 $yz^{-1}W^{-1}zy^{-1}\subset U^{-1}$，即 $yz^{-1}W^{-1}\subset U^{-1}yz^{-1}$. 于是

$$(Uy)(Wz)^{-1}=Uyz^{-1}W^{-1}\subset UU^{-1}yz^{-1}\subset V'vx\subset Vx. \quad \blacksquare$$

由于我们所要讨论的拓扑群都是 Hausdorff 空间，首先需要下面的

命题 1.4 设 G 是拓扑群，Σ^* 是恒等元 1 的完全邻域组，则下述断言等价：

(1) G 是 Hausdorff 空间；

(2) 对角线映射 $\delta: G\to G\times G$, $x\mapsto(x,x)$ 是闭映射；

(3) $\{1\}$ 是闭集；

(4) 若 $f: H\to G$ 是拓扑群之间的连续同态，则 $\mathrm{Ker}f$ 是 H 的闭集；

(5) $\bigcap_{V\in\Sigma^*} V=\{1\}$;

(6) 恒等元 1 的一切邻域之交为$\{1\}$.

证明 (1) $\Longrightarrow$(2) 设 Y 是 G 中闭集,要证明 $\delta(Y)\subset G\times G$ 是闭集. 设$(x,y)\notin\delta(Y)$,则或者 $x\neq y$,或者 $x=y\notin Y$. 若 $x\neq y$,存在不相交的开集 A 与 B 使得 $x\in A,y\in B$,且 $A\times B$ 是 $G\times G$ 中开集. 因为 $A\cap B=\varnothing$,所以$(A\times B)\cap\delta(Y)=\varnothing$. 若 $x=y\notin Y$,则存在 x 的邻域 A 使得 $A\cap Y=\varnothing$,从而$(x,y)\in A\times A$,且 $A\times A$ 是 $G\times G$ 中开集,$(A\times A)\cap\delta(Y)=\varnothing$. 于是 $\delta(Y)$是闭集.

(2) $\Longrightarrow$(3) 由于 δ 是闭映射,对角线 $\Delta=\{(x,x)\mid x\in G\}$是闭集,因此对角线在 $G\times G$ 中补集是开集. 令 $A=G-\{1\}$,$x\neq 1$,则$(x,1)\notin\Delta$,从而存在开集 $U\times V$ 使得$(x,1)\in U\times V\subset G\times G-\Delta$,于是 $U\cap V=\varnothing$,即 $x\in U\subset A$,所以 A 是开集,亦即$\{1\}$是闭集.

(3) $\Longrightarrow$(4) $\mathrm{Ker}f=f^{-1}(1)$,但$\{1\}$是闭集.

(4) $\Longrightarrow$(5) 令 f 是 G 的恒等映射,则 $\mathrm{Ker}f=\{1\}$是闭集,从而 G 中独点集是闭集. 若 $x\neq 1$,则 $G-\{x\}$是含1的开集,从而存在 $V\in\Sigma^*$ 使得 $V\subset G-\{x\}$,即 $x\notin V$,于是 $x\notin\bigcap_{V\in\Sigma^*} V$.

(5) $\Longrightarrow$(6) 显然.

(6) $\Longrightarrow$(1) 设 $x,y\in G$ 且 $x\neq y$,则 $xy^{-1}\neq 1$,从而存在恒等元 1 的邻域 V 使得 $xy^{-1}\notin V$. 对开集 V,存在 $U\in\Sigma^*$ 使得 $U^{-1}U\subset V$,$U^{-1}U\cap\{xy^{-1}\}=\varnothing$,从而 $Ux\cap Uy=\varnothing$. 但是 Ux 与 Uy 分别是 x 与 y 的邻域,因此 G 是 Hausdorff 空间. ▌

设 H 是拓扑群 G 的子集,若 H 既是群 G 的子群,又是拓扑空间 G 的子空间,则 H 是拓扑群 G 的子群.

命题 1.5 设 G 是拓扑群,则

(1) G 的每个开子群一定是闭的,每个指数有限的闭子群一定是开的;

(2) G 的含恒等元 1 的任一邻域的子群一定是开的.

证明 (1) 若 H 是 G 的开子群,则对每个 $x\notin H$,xH 是 G

中开集，从而 $G-H=\bigcup\limits_{x\notin H}xH$ 是开集，即 H 是闭的．又若 H 是 G 的指数有限的闭子群，则对每个 $x\notin H$，xH 是 G 中闭集，从而 $G-H=\bigcup\limits_{x\notin H}xH$ 是闭集，即 H 是开的．

（2）设 H 是 G 的子群且包含恒等元 1 的一个邻域 V，则 $H=VH$，从而 H 是开的． ▌

考虑左陪集空间 $G\backslash H$ 及典范映射 $\pi:G\to G\backslash H$，赋予 $G\backslash H$ 商拓扑后，它成为商空间．特别，当 H 是 G 的正规子群时，$G\backslash H$ 关于商拓扑是一个拓扑群，称为 G 关于 H 的商群．

命题 1.6 设 G 是拓扑群，H 是 G 的子群，则

（1）典范映射 $\pi: G\to G\backslash H$ 是开映射；

（2）H 是开子群当且仅当 $G\backslash H$ 有离散拓扑；

（3）当 H 是正规子群时，G/H 也是拓扑群．

证明 （1）设 $V\subset G$ 是开集，因为

$$\pi^{-1}(\pi(V))=\bigcup_{xH\cap V\neq\varnothing}xH=VH$$

是 G 中开集，所以 $\pi(V)$ 是 $G\backslash H$ 中开集，即 π 是开映射．

（2）因为 H 是开子群当且仅当每个陪集 xH 都是开集，所以 H 是开子群当且仅当 $G\backslash H$ 中独点集是开集，即 $G\backslash H$ 有离散拓扑．

（3）考虑交换图：

$$\begin{array}{ccc}
G\times G & \xrightarrow{\quad\varphi\quad} & G \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \pi\times\pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\
G/H\times G/H & \xrightarrow{\quad\bar{\varphi}\quad} & G/H
\end{array}$$

因为 π 与 φ 是连续的，其中 $\varphi(x,y)=xy^{-1}$，所以 $\bar{\varphi}\circ(\pi\times\pi)=\pi\circ\varphi$

是连续的. 设 $U\subset G/H$ 是开集，则 $\left((\pi\times\pi)^{-1}\circ\bar{\varphi}^{-1}\right)(U)$ 是 $G\times G$ 中开集. 由于 $\pi\times\pi$ 是开映射，所以 $\bar{\varphi}^{-1}(U)\subset G/H\times G/H$ 是开集，即 $\bar{\varphi}$ 是连续映射. ▌

命题 1.7 设 $\varphi\colon G\to G'$ 是拓扑群的开连续映射，$N=\mathrm{Ker}\varphi$，则存在唯一的拓扑群同构 $\bar{\varphi}\colon G/N\to\mathrm{Im}\varphi$，并且 $\varphi=\bar{\varphi}\circ\pi$，其中 $\pi\colon G\to G/N$ 是典范映射.

证明 显然，作为抽象群而言，商群 G/N 与 $\mathrm{Im}\varphi$ 同构，并且 $\bar{\varphi}(xH)=\varphi(x)$ $(x\in G)$，因此有 $\varphi=\bar{\varphi}\circ\pi$. 由于 π 是开连续映射，设 $U\subset\mathrm{Im}\varphi$ 是开集，则 $\varphi^{-1}(U)=\pi^{-1}\left(\bar{\varphi}^{-1}(U)\right)$ 是 G 中开集，从而 $\bar{\varphi}^{-1}(U)$ 是 G/N 中开集，即 $\bar{\varphi}$ 是连续的. 又因为 φ 是开映射，设 V 是 G/N 中开集，则 $\pi^{-1}(V)$ 是 G 中开集，从而 $\bar{\varphi}(V)=\varphi\left(\pi^{-1}(V)\right)$ 是 $\mathrm{Im}\varphi$ 中开集，即 $\bar{\varphi}$ 也是开映射，于是 $\bar{\varphi}$ 是拓扑群同构. ▌

由此可见，拓扑群之间的开映射是群同态概念的自然推广. 我们有一个判别连续映射 $\varphi\colon G\to G'$ 是开映射的简单法则：对 G 的恒等元 1 的每一个邻域 V，存在 G' 的恒等元 $1'$ 的一个邻域 V' 使得 $\varphi(V)\supset V'$（例如参考[P1] § 20，A）.

例 3 (1) 例2(2)的映射 φ 是开连续映射，因此有拓扑群同构

$$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}\cong S^1.$$

(2) 由 $z\mapsto z/|z|$ 定义的映射 $\varphi\colon\boldsymbol{C}^*\to S^1$ 是开连续映射，核为 $\boldsymbol{R}_+^*$，于是有拓扑群同构

$$\boldsymbol{C}^*/\boldsymbol{R}_+^*\cong S^1.$$

(3) 由 $z\mapsto|z|$ 定义的 $\varphi\colon\boldsymbol{C}^*\to\boldsymbol{R}_+^*$ 是开且满的连续映射，$\mathrm{Ker}\varphi=S^1$，因此有拓扑群同构

$$\boldsymbol{C}^*/S^1\cong\boldsymbol{R}_+^*.$$

(4) 行列式映射 $\det\colon GL_n(\boldsymbol{R})\to\boldsymbol{R}^*$，$A\mapsto\det(A)$ 是开且满的连续映射，$\mathrm{Ker}(\det)=SL_n(\boldsymbol{R})$，从而有拓扑群同构

$$GL_n(\boldsymbol{R})/SL_n(\boldsymbol{R})\cong\boldsymbol{R}^*.$$

(5) 记 $H=\{A=\lambda I \mid \lambda\in \boldsymbol{R}^*\}$，它是 $GL_n(\boldsymbol{R})$ 的中心，从而是正规子群，同构于 $\boldsymbol{R}^*$. 商群

$$PGL_n(\boldsymbol{R}) = GL_n(\boldsymbol{R})/H$$

是一个拓扑群，称为**射影一般线性群**.

在群论中还有一些同构定理，在一定条件下，它们也在拓扑群中成立.

命题 1.8 设 $\varphi: G\to G'$ 是拓扑群的开且满的连续映射，核为 N，则群 G' 的子群与群 G 的含核 N 的子群之间存在一一对应，正规子群对应正规子群，并且当 M 与 M' 是对应的正规子群时，商群 G/M 与 G'/M' 同构. ▌

命题 1.9 设 G 是拓扑群，N 与 H 是 G 的子群，则

(1) 若 $H\subset N$，则把 $N\backslash H$ 看作 $G\backslash H$ 的子空间或看作 N 的商空间，这两种拓扑是等价的；又若 $H\lhd G$，则 G/H 的每个子群作为拓扑群同构于一个商群 N/H，$H\subset N\subset G$；进一步若 $N\lhd G$，则有拓扑群同构

$$(G/H)/(N/H)\cong G/N;$$

(2) 若 G 是局部紧致的，且是可数个紧致集合的并，H 与 N 分别是 G 的子群与正规子群，HN 是 G 中开集，则 $HN=NH$ 是 G 的子群，$H\cap N$ 是 H 的正规子群，且有拓扑群同构

$$HN/N\cong H/(H\cap N). \quad ▌$$

我们不在这里给出上述两个命题的证明，读者可以参考[FL] p. 21及[P1] § 20，D，G.

命题 1.10 设 G 是拓扑群，H 是 G 的子群，则

(1) G 是紧致的(或局部紧致的)，H 是闭子群，则 H 是紧致的(或局部紧致的)；

(2) G 是紧致的(或局部紧致的)，则 $G\backslash H$ 是紧致的(或局部紧致的)；

(3) $G\backslash H$ 与 H 是紧致的(或局部紧致的)，则 G 是紧致的(或局部紧致的)；

证明 (1)与(2)是拓扑空间的紧致性与局部紧致性的性质的直接推论(见附录A命题A.9(1),(3)与命题A.13(2),(4)).(3)的证明用到更多的拓扑空间知识,我们不准备给出其证明,有兴趣的读者可以参考[FL]p.24或[P1]§19,H与I. ∎

命题 1.11 设G是拓扑群,H是G的子群,则

(1) G是Hausdorff空间时,H也是Hausdorff空间;

(2) $G\backslash H$是Hausdorff空间当且仅当H是G的闭子群;

(3) H与$G\backslash H$是Hausdorff空间时,G也是Hausdorff空间.

证明 (1) 设$x\neq y$是H中元素,由于G是Hausdorff的,存在x与y在G中的不相交的邻域U_x与U_y,令$V_x=U_x\cap H$,$V_y=U_y\cap H$,则V_x与V_y是x与y在H中的不相交的邻域.

(2) $G\backslash H$是Hausdorff空间时,独点集是闭集,因此H是$G\backslash H$中闭集从而是G中闭集.反之,可以参考[P1]§19,F.

(3) 由于H与$G\backslash H$都是Hausdorff空间,由(2),H是G的闭子群,又由命题1.4,$\{1\}$是H中闭集,于是$\{1\}$是G中闭集,G也是Hausdorff空间. ∎

易见$G\backslash H$是齐性空间.

设$\{G_i\}_{i\in I}$是一族拓扑群,则群的拓扑积

$$G=\prod_{i\in I}G_i$$

既是群的直积又是拓扑空间的拓扑积,而且它也是拓扑群.为此只要证明$\varphi(x,y)=xy^{-1}$定义的运算$\varphi: G\times G\to G$关于G的乘积拓扑是连续映射.我们把它留作练习.关于拓扑群的积,下面的命题是显然的.

命题 1.12 设$\{G_i\}_{i\in I}$是一族拓扑群,$G=\prod_{i\in I}G_i$,则

(1) G是紧致的(或局部紧致的)当且仅当每个G_i是紧致的(或局部紧致的,且除有限个外是紧致的);

(2) G是Hausdorff空间当且仅当每个G_i是Hausdorff空

间. ▌

例 4 (1) $\boldsymbol{R}^n$ 是关于加法和距离拓扑所成的拓扑群,它是 n 个拓扑群 $\boldsymbol{R}$ 的拓扑积,即 $\boldsymbol{R}^n=\underbrace{\boldsymbol{R}\times\cdots\times\boldsymbol{R}}_{n个}$.

(2) $\boldsymbol{R}$ 关于加法与距离拓扑所成的拓扑群是 Hausdorff 的;$\boldsymbol{R}^*$ 关于乘法与距离拓扑所成的拓扑群是 Hausdorff 的;复平面上单位圆 S^1(作为非零复数的乘法群 $\boldsymbol{C}^*$ 的子群)是 Hausdorff 的;由于 $\boldsymbol{Q}$ 在 $\boldsymbol{R}$ 中稠密,因此 $\boldsymbol{Q}$ 不是 $\boldsymbol{R}$ 中闭集,从而商群 $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Q}$ 不是 Hausdorff 的.

与抽象群不同的是拓扑群的连通性质.当拓扑群 G 作为拓扑空间是连通(相应地,不连通、局部连通、道路连通、完全不连通)时,G 就称为连通(相应地,不连通、局部连通、道路连通、完全不连通)的拓扑群.由拓扑空间连通性的基本性质(见附录 A 命题 A.15),容易证明下面的

命题 1.13 设 $G,G_i(i\in I)$ 是拓扑群,H 是 G 的子群,则

(1) 若 G 是连通拓扑群(或完全不连通的拓扑群),则 $G\backslash H$ 是连通的(或完全不连通的);

(2) $G=\prod\limits_{i\in I}G_i$ 是连通拓扑群(或完全不连通的拓扑群)当且仅当每个 G_i 是连通拓扑群(或完全不连通的拓扑群). ▌

命题 1.14 (1) 若 G 是连通拓扑群,则 G 没有真开子群,也没有具有有限指数的真闭子群;

(2) 若 H 是拓扑群 G 的连通(或完全不连通)的子群,使得 $G\backslash H$ 是连通的(或完全不连通的),则 G 也是连通拓扑群(或完全不连通的拓扑群).

证明 (1) 由于 G 连通当且仅当它没有非平凡的既开又闭的子集,因此结论由命题1.5(1)得到.

(2) 设 H 与 $G\backslash H$ 是连通的,$G=A\cup B$ 是一个分解,由于 H 的每个左陪集 xH 也是连通的,因此或者是 $xH\cap A=\varnothing$ 或者是 $xH\cap B=\varnothing$,从而 A 与 B 是 H 的陪集的并,使得

$$G\backslash H = \pi(A) \cup \pi(B)$$

是 $G\backslash H$ 的一个分解. 但 $G\backslash H$ 连通,迫使 $\pi(A)$ 与 $\pi(B)$ 中有一个是空集,从而 A 与 B 中有一个是空集,于是 G 连通.

又设 H 与 $G\backslash H$ 完全不连通,$A\subset G$ 是一个连通子空间,则 $\pi(A)$ 是 $G\backslash H$ 中连通子空间,从而是 $G\backslash H$ 中一个点,于是 A 在 H 的一个左陪集 xH 中. 但 xH 与 H 同胚,它是完全不连通的,所以 A 是 xH 中一点,于是 G 是完全不连通的. ▎

命题 1.15 设 G 是拓扑群,G° 是 G 在恒等元 1 处连通分支,则

(1) G° 是 G 的闭连通正规子群;

(2) G/G° 是完全不连通的 Hausdorff 拓扑群;

(3) G° 的每个陪集恰是 G 的一个连通分支;

(4) G 的每个开子群包含 G°.

证明 (1) 只要证明 $G^\circ \lhd G$. 设 $x\in G^\circ$, $y\in G$, 因为 $x^{-1}G^\circ$, $y^{-1}G^\circ y$ 都与 G° 同胚,它们也是连通的且与 G° 有非空交,所以 $x^{-1}G^\circ\subset G^\circ$, $y^{-1}G^\circ y\subset G^\circ$, 进一步有 $(G^\circ)^{-1}\subset G^\circ$, $G^\circ G^\circ\subset G^\circ$, 所以 $G^\circ \lhd G$.

(2) 因为 G° 闭,由命题1.11(2), G/G° 是 Hausdorff 的,考虑商群 G/G° 的恒等元的连通分支,由(1)及命题1.9(1),它可以表成 N/G° 的形式,其中 N 是 G 中包含 G° 的连通子群,从而 $G^\circ=N$, 即 G/G° 是完全不连通的.

(3) 拓扑群是齐性的,用附录 A 中命题 A.17(1)即可.

(4) 设 H 是 G 的开子群,它也是 G 的闭子群,且 $H\cap G^\circ\neq\varnothing$, 必有 $H\cap G^\circ=G^\circ$, 即 $G^\circ\subset H$.

例 5 (1) 实数加法群 $\boldsymbol{R}$ 是道路连通的,对任意的 $x, y\in\boldsymbol{R}$, 只要取 $f(t)=xt+y(1-t)$ ($t\in[0,1]$)即可.

(2) 非零实数的乘法群 $\boldsymbol{R}^*$ 有两个连通分支: $\boldsymbol{R}_+^*$ 与 $\boldsymbol{R}_-^*$.

(3) 作为 $\boldsymbol{R}$ 的子群,有理数加法群 $\boldsymbol{Q}$ 是完全不连通的;即使考虑 $\boldsymbol{Q}$ 上 p-adic 拓扑, $\boldsymbol{Q}$ 也是完全不连通的.

正如抽象群作用在集合上一样，拓扑群可以作用在拓扑空间上.

定义 1.16 设 G 是拓扑群，M 是拓扑空间，若存在连续映射

$$G\times M\to M,\quad (x,v)\mapsto x\cdot v,\quad x\in G, v\in M$$

使得

(1) $(x_1x_2)\cdot v=x_1\cdot(x_2\cdot v)$, $x_1,x_2\in G$, $v\in M$;

(2) $1\cdot v=v, v\in M$.

则称 G(左)作用在 M 上，G 是 M 的**拓扑变换群**.

与抽象群的情形相类似，可以考虑 G 在 M 上作用的轨道，M 的元素在 G 中的稳定子群. 特别. 当 M 中每个元素 v 在 G 作用下的轨道等于 M 时，即对每个 $v\in M$，由 $\rho_v(x)=x\cdot v$ 定义的映射 ρ_v: $G\to M$ 是满的，就称 M 关于 G 的作用是齐性的，并且把 ρ_v 称为**轨道映射**.

命题 1.17 设拓扑群 G 作用在 Hausdorff 空间 M 上，则

(1) 对任意的 $v\in M$，v 在 G 中稳定子群 G_v 是闭子群;

(2) 若 M 关于 G 的作用是齐性的，则由 $xG_v\mapsto x\cdot v$ 定义的映射 φ: $G\backslash G_v\to M$ 是连续映射.

证明 (1)是显然的. 为了证明(2)，考虑典范映射 π: $G\to G\backslash G_v$，由于 $\rho_v=\varphi\circ\pi$:$G\to M$, $x\mapsto x\cdot v$ 是连续的，设 $V\subset M$ 是开子集，则 $\rho_v^{-1}(V)=(\pi^{-1}\circ\varphi^{-1})(V)$是 G 的开子集，但 π 是开映射，因此 $\varphi^{-1}(V)=\pi((\pi^{-1}\circ\varphi^{-1})(V))$是 $G\backslash G_v$ 的开子集. ▎

命题 1.18 设 G 是局部紧致群，G°是 G 的恒等元的连通分支. 设 M 是局部紧致的 Hausdorff 空间，它关于 G 的作用是齐性的，又设 G'是 G 的指数可数的开子群使得 G'/G°是紧致的，则对任意的 $v\in M$，$G\backslash G_v$ 与 M 同胚.

特别，当 G 是紧致群或 G 只有可数个连通分支时，恒有 M 与 $G\backslash G_v$ 同胚.

证明 考虑 φ: $G\backslash G_v\to M$，它是单的又是满的连续映射，只要证明 φ 是开映射即可. 设 $U\subset G$ 是恒等元 1 的紧致的对称邻域

$(U^{-1}=U)$，取可数集$\{x_n\}\subset G$ 使得 $G\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}x_nU$，则 $M\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}x_nU\cdot v$. 由于 U 是紧致的，因此 $U\cdot v$ 是 M 中紧致集，但 M 是 Hausdorff 的，所以 $U\cdot v$ 是 M 中闭集. 由本节习题3，存在 n 使得 $x_nU\cdot v$ 有内点. 但是 $x_nU\cdot v$ 与 $U\cdot v$ 同胚，因此有 $y\in U$ 使得 $y\cdot v$ 是 $U\cdot v$ 的内点，即 $v\in y^{-1}U\cdot v\subset U^2\cdot v$. 现设 $V\subset G$ 为开子集，$x\in V$，取上述的 U 使得 $xU^2\subset V$，则 $x\cdot v\subset xU^2\cdot v\subset V\cdot v$，于是 ρ_v 是开映射，从而 φ 也是开映射. ▌

例 6 设 $G=SL_2(\boldsymbol{R})$，$H=\{z\in\boldsymbol{C}\mid z=x+\mathrm{i}y,y>0\}$. 对于 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\in G$，$z\in H$，定义映射 $G\times H\to H$：

$$A(z)=\frac{az+b}{cz+d}.$$

则 $G\times H\to H$ 是连续的，在 H 上可传递，$SL_2(\boldsymbol{R})$是连通的，且 $G_i=O_2(\boldsymbol{R})$，于是 H 与 $SL_2(\boldsymbol{R})/O_2(\boldsymbol{R})$同胚.

习　题

1. 设 Σ^* 是拓扑群 G 的恒等元 1 的完全邻域组，则

(1) 设 $U\in\Sigma^*$，则存在 $V\in\Sigma^*$ 使得 $V^{-1}\subset U$；

(2) 设 $U\in\Sigma^*$，则存在 $V\in\Sigma^*$ 使得 $V^2=VV\subset U$.

2. 设 G 是抽象群，Σ^* 是 G 的子群族，满足

(1) 若 $H,N\in\Sigma^*$，则存在 $L\in\Sigma^*$ 使得 $L\subset H\cap N$；

(2) 若 $H\in\Sigma^*$，$x\in G$，则存在 $N\in\Sigma^*$ 使得 $x^{-1}Nx\subset H$. 则 G 是以Σ^* 为恒等元 1 的完全邻域组的拓扑群.

3. 设 X 是局部紧致且可数紧致(即 X 的每个可数开覆盖有一个有限子覆盖)的 T_3空间，则 X 内不存在可数个闭子集$\{F_n\}$使得每个 F_n 没有内点且

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n.$$

4. 设 A 是拓扑群 G 的闭子集，B 是 G 的紧致子集，则 AB 是

G 的闭子集.

5. 设 H 是实数加法群 $\boldsymbol{R}$ 的非零子群，证明：或者

(1) $H=a\boldsymbol{Z}, a\in\boldsymbol{R}^*$ 是离散子群；或者

(2) H 在 $\boldsymbol{R}$ 中稠密.

6. 证明命题1.8与命题1.9.

7. 设$\{G_i\}_{i\in I}$是一族拓扑群，则 $G=\prod_{i\in I}G_i$ 是一个拓扑群.

8. 证明：

(1) $GL_n(\boldsymbol{C})$是连通的；

(2) $GL_n(\boldsymbol{R})$有两个连通分支.

9. 若 G 是拓扑群，H 是紧致子群，则典范映射 $\pi: G\to G\backslash H$ 是闭映射.

10. 若 H 是拓扑群 G 的子群，则 $\overline{H}$ 也是 G 的子群.

11. 设 Hausdorff 拓扑群 G 作用在拓扑空间 M 上，Y，Z 是 M 的子集，其中 Z 是闭子集，则

(1) $\mathrm{Tran}_G(Y,Z)=\{x\in G\mid x\cdot Y\subset Z\}$是 G 的闭子集；

(2) 对任意的 $x\in G$，x 的不动点集 $M^x=\{v\in M\mid x\cdot v=v\}$是 M 的闭子集；特别，$M^G=\bigcap_{x\in G}M^x$ 是 M 的闭子集；

(3) 对每个 $v\in M$，稳定子群 G_v 是 G 的闭子群；特别，$Z_G(Y)=\bigcap_{v\in Y}G_v$ 是闭的.

12. 设 G 是 Hausdorff 拓扑群，H 是 G 的闭子群，则 $N_G(H)$ 与 $Z_G(H)$是 G 的闭子群；对每个 $x\in G$，$Z_G(x)$也是 G 的闭子群.

13. 设 G 是局部紧致的 Hausdorff 拓扑群，它的空间可以表成可数个紧致子集的并. 又设 G'是局部紧致的 Hausdorff 拓扑群，φ: $G\to G'$是拓扑群的满同态，证明 φ是开映射.

14. 设 $f: G\to G'$是 Hausdorff 拓扑群，对 G'的恒等元 $1'$ 的邻域 U'存在 G 的恒等元 1 的邻域 U 使得 $f(U)\subset U'$，则 f 是连续的.

§2 拓扑群上的不变积分

为了讨论紧致拓扑群与局部紧致拓扑群的线性表示，首先要在群上建立**不变积分**. 我们总假定 G 是 Hausdorff 拓扑群.

与数学分析中连续性概念相平行的，我们考虑拓扑群上实值函数的连续性.

定义 2.1 设 f 是拓扑群 G 上的函数，我们说 f 在 $a\in G$ 处**连续**，如果对任给的正数 ε，存在恒等元 1 的邻域 V，当 $x\in G$ 使得 $xa^{-1}\in V$ 时，有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$. 进一步，对任给的正数 ε，存在恒等元 1 的邻域 V，当 $x,y\in G$ 使得 $xy^{-1}\in V$ 时，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，则称 f 在 G 上**一致连续**.

易知，当 G 是紧致拓扑群时，G 上连续函数 f 一定是一致连续的.

又设 $\mathfrak{L}(G)$ 是 G 上函数的集合，若对于任给正数 ε，存在恒等元 1 的邻域 V，当 $x,y\in G$ 使得 $x^{-1}y\in V$ 时，对每个 $f\in\mathfrak{L}(G)$ 有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，则称 $\mathfrak{L}(G)$ 是**一致连续函数组**. 这时，$\mathfrak{L}(G)$ 中每个函数在 G 上一致连续. 又若存在数 M，当 $x\in G$，$f\in\mathfrak{L}(G)$ 时，恒有 $|f(x)|<M$，则称 $\mathfrak{L}(G)$ 是**一致有界函数组**. 进一步考虑 G 上函数序列 $\{f_n\}_{n\in N}$，我们说 $\{f_n\}_{n\in N}$ **一致收敛**于 G 上函数 f，如果对任给的正数 ε，存在 $m\in N$，当 $n>m$ 时，对每个 $x\in G$ 都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

与数学分析中一样可以证明下述性质：

(1) 拓扑群 G 上函数序列 $\{f_n\}_{n\in N}$ 一致收敛的充分必要条件是对任给的正数 ε，存在 $m\in N$，当 $p>m$，$q>m$ 时，对每个 $x\in G$ 有 $|f_p(x)-f_q(x)|<\varepsilon$.

(2) 拓扑群 G 上连续函数序列 $\{f_n\}_{n\in N}$ 一致收敛于 f 时，f 也是 G 上连续函数.

(3) 紧致拓扑群 G 上一致收敛的连续函数序列 $\{f_n\}_{n\in N}$ 一定

是一致连续的，也是一致有界的.

(4) 紧致拓扑群 G 上一致有界与一致连续的函数组 $\mathfrak{L}(G)$ 的每个函数序列恒有一致收敛的子序列.

我们把上述性质的证明作为练习留给读者.

定义 2.2 设 X 为紧致拓扑空间，f 是 X 上连续函数，以 $M(f)$ 表示函数 f 的最大值，$m(f)$ 表示函数 f 的最小值，则 $S(f)=M(f)-m(f)$ 称为函数 f 的**振幅**.

显然，当连续函数序列 $\{f_n\}_{n\in N}$ 一致收敛于连续函数 f 时，有

$$\lim_{n\to\infty}M(f_n)=M(f),\quad \lim_{n\to\infty}m(f_n)=m(f),$$
$$\lim_{n\to\infty}S(f_n)=S(f).$$

定义 2.3 设 G 是紧致拓扑群，如果对于每个定义在 G 上的连续函数 f，有一个实数$\left(\text{记为}\int f(x)\mathrm{d}x\right)$与它对应，并且满足下列条件：

(1) 线性　对于实数 α,β 及 G 上连续函数 f,g，有

$$\int(\alpha f(x)+\beta g(x))\mathrm{d}x=\alpha\int f(x)\mathrm{d}x+\beta\int g(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 非负性　若对所有的 $x\in G$ 有 $f(x)\geqslant 0$，则

$$\int f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

且等号成立当且仅当 $f\equiv 0$；

(3) 正规性　$\int \mathrm{d}x=1$；

(4) 不变性　对任意的 $a\in G$，有

$$\int f(xa)\mathrm{d}x=\int f(ax)\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x;$$

(5) 可逆性　$\int f(x^{-1})\mathrm{d}x=\int f(x)\mathrm{d}x.$

那么我们说在 G 上建立了一个**不变积分**.

显然，当 $f(x)\leqslant g(x)$ 时，有

$$\int f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int g(x)\mathrm{d}x,$$

从而由$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|$，有

$$\left|\int f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int|f(x)|\mathrm{d}x.$$

为了证明不变积分的存在性与唯一性，我们必须做一系列准备工作. 回忆一下在讨论有限群G的线性表示时，我们经常考虑G上函数f的平均数

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}f(x).$$

在紧致 Hausdorff 群时，由于群G的阶往往是无限的，必须用**不变测度 dx** 及不变积分$\int f(x)\mathrm{d}x$来代替$\frac{1}{|G|}$及$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}f(x)$，其中$f(x)$是$G$上的连续函数. 设$f$是$G$上连续函数，$A=\{a_1,\cdots,a_m\}\subset G$是一个有限子集(其中元素可以是相同的)，令

$$K(A,f;x)=\sum_{i=1}^{m}\frac{f(xa_i)}{m},\quad x\in G.$$

易见$K(A,f)$是G上连续函数，并且有下述性质：

(1) $M(K(A,f))\leqslant M(f)$；

(2) $m(K(A,f))\geqslant m(f)$；

(3) $S(K(A,f))\leqslant S(f)$；

又设$B=\{b_1,\cdots,b_n\}\subset G$是另一个有限子集，则

(4) $K(A,K(B,f))=K(AB,f)$，其中$AB=\{a_1b_1,\cdots,a_1b_n,\cdots,a_mb_n\}$也是$G$的有限子集；

若f为定义在G上非常数连续函数，则存在G的有限子集A使得

(5) $S(K(A,f))<S(f)$.

我们只证明性质(5)，其余几条是显然的. 设$M=M(f)$，$m=m(f)$，由于f是连续的，$m\lneqq M$，因此存在开集$U\subset G$使得$x\in U$时有$f(x)\leqslant h<M$. 形如Ua^{-1}的所有开集覆盖G，但G是紧致的，所以存在有限子集$A=\{a_1,\cdots,a_m\}$使得$G=\bigcup_{i=1}^{m}Ua_i^{-1}$. 又因为对每个$x\in G$，$f(xa_i)\leqslant M$，而且存在$a_j$使得$x\in Ua_j^{-1}$，所以$f(xa_j)\leqslant$

h,从而

$$M(K(A,f)) \leqslant \frac{(m-1)M+h}{m} \lneqq M.$$

于是由(2)就得到(5).

设 f 是 G 上连续函数,如果实数 p 具有下述性质:对任给正数 ε,存在 G 的有限子集 A 使得对每个 $x \in G$ 有

$$|K(A,f;x) - p| < \varepsilon,$$

那么 p 称为函数 f 的**右平均数**.

引理 2.4 每个定义在 G 上的连续函数至少有一个右平均数.

证明 设 f 是 G 上连续函数,考虑函数集合

$$\mathfrak{L}(G) = \{K(A,f) \mid A \subset G \text{ 为有限子集}\},$$

它是有界的,而且是一致连续的.

事实上,因为 f 连续,所以 f 是一致连续的,对任给正数 ε,存在恒等元 1 的邻域 V,当 $x,y \in G$ 使得 $xy^{-1} \in V$ 时,有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon,$$

但此时也有 $(xa_i)(ya_i)^{-1}=xy^{-1}\in V$,所以 $|f(xa_i)-f(ya_i)|<\varepsilon$,于是有 $|K(A,f;x)-K(A,f;y)|<\varepsilon$,故 $\mathfrak{L}(G)$ 是一致连续的.

令 s 是 $\{S(K(A,f))\}$ 的下界,则在 $\mathfrak{L}(G)$ 中存在函数序列 $\{f_n\}_{n\in N}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} S(f_n) = s.$$

但 $\mathfrak{L}(G)$ 是有界且一致连续的,所以存在一致收敛的子序列 $\{g_n\} \subset \{f_n\}$,使得

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g, \quad \lim_{n\to\infty} S(g_n) = S(g) = s.$$

其中 g 是序列 $\{g_n\}$ 的极限. 可以证明 g 是常数,从而 $s=0$. 设若不然,由性质(5),存在 G 的有限子集 C 使得

$$S(K(C,g)) = s' < s = S(g).$$

取 $\varepsilon=\frac{s-s'}{3}$, 由于 $\{g_n\}$ 一致收敛于 g, 存在 $k \in N$ 对每个 $x \in G$ 有

$|g(x)-g_k(x)|<\varepsilon$,从而$|K(C,g;x)-K(C,g_k;x)|<\varepsilon$. 于是

$$S(K(C,g_k)) \leqslant s' + 2\varepsilon < s.$$

但是由性质(4),$K(C,g_k)\in\Omega(G)$,迫使 $S(K(C,g_k))\geqslant s$ 而矛盾. 因此 g 是常数,$g(x)\equiv p$.

因为序列$\{g_n\}$一致收敛于 g,所以对任给正数 ε,存在 $n\in N$ 使得$|g_n(x)-p|<\varepsilon$. 由于 $g_n\in\Omega(G)$,因此对任给正数 ε,存在 G 的有限子集 A 使得

$$|K(A,f;x) - p| < \varepsilon,$$

从而 p 是 f 的一个右平均数. ▌

类似的,对 G 上每个连续函数 f 及 G 的有限子集 $B=\{b_1,\cdots,b_n\}$,令

$$K'(B,f;x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{f(b_j x)}{n},$$

使 $K'(B,f)$是 G 上连续函数. 容易验证

(6) $K(A,K'(B,f))=K'(B,K(A,f))$.

我们可以同样定义 f 的**左平均数**,并且有

引理 2.5 设 f 是 G 上连续函数,则只存在 f 的一个右平均数及一个左平均数,而且这两个平均数相等.

这样得到的一个唯一的平均数称为 f 的**平均数**,记为 $K(f)$.

证明 设 p 是 f 的一个右平均数,q 是 f 的一个左平均数. 对任给正数 ε,存在 G 的有限子集 A 及 B,使得

$$|K(A,f;x) - p| < \varepsilon/2,$$
$$|K'(B,f;x) - q| < \varepsilon/2.$$

于是有

$$|K'(B,K(A,f);x) - p| < \varepsilon/2.$$

同样有

$$|K(A,K'(B,f);x) - q| < \varepsilon/2.$$

由性质(6),有$|p-q|<\varepsilon$,迫使 $p=q$,即 f 的某一个右平均数等于每一个左平均数,f 的某一个左平均数等于每一个右平均数,从而

引理得证. ∎

连续函数的平均数有下述性质：

引理 2.6 设 f 与 g 是 G 上连续函数，$a\in G$，令 $f'(x)=f(xa)$，$f''(x)=f(ax)$，则

(1) $K(f+g)=K(f)+K(g)$；

(2) $K(f')=K(f)=K(f'')$；

(3) 当 f 是非负且不恒等于零的连续函数时，$K(f)>0$.

证明 (1) 设 $K(f)=p$，$K(g)=q$，则对任给正数 ε，存在 G 的有限子集 C 使得

$$|K'(C,f;x)-p|<\varepsilon,$$

于是，对 G 的任意有限子集 B 有

$$|K(B,K'(C,f);x)-p|<\varepsilon.$$

由性质(6)，有

$$|K'(C,K(B,f);x)-p|<\varepsilon,$$

从而有

$$K(K(B,f))=K(f)=p.$$

因此存在 G 中有限子集 A 使得

$$|K(A,K(B,f);x)-p|<\varepsilon,$$

由性质(4)，有

$$|K(AB,f;x)-p|<\varepsilon.$$

同时，对任给正数 ε，存在 G 的有限子集 B' 使得

$$|K(B',g;x)-q|<\varepsilon,$$

于是，对 G 的任意有限子集 A' 有

$$|K(A',K(B',g);x)-q|<\varepsilon,$$

由性质(4)，有

$$K(A'B',g;x)-q|<\varepsilon.$$

这样，当 $A=A'$，$B=B'$ 时，就有

$$|K(AB,f+g;x)-(p+q)|<2\varepsilon,$$

即 $p+q$ 是函数 $f+g$ 的平均数，这证明了(1).

(2) 由于 f' 与 f 的右平均数一致，f'' 与 f 的左平均数一致，这是因为

$$K(A,f')=K(Aa,f),\quad K'(A,f'')=K'(aA,f)$$

的缘故，于是(2)成立.

(3) 由于 f 是非负且不恒等于零的，存在开集 $U\subset G$，当 $x\in U$ 时有 $f(x)>h>0$. 形如 Ua^{-1} 的开集覆盖 G，且群 G 是紧致的，因此存在 G 的有限子集 $A=\{a_1,\cdots,a_m\}$ 使得 $G=\bigcup_{i=1}^{m}Ua_i^{-1}$. 因为对每个 $x\in G$ 有 $f(x)\geqslant 0$，且有 $a_k\in G$ 使得 $x\in Ua_k^{-1}$，所以 $f(xa_k)>h$，从而 $K(A,f;x)\geqslant h/m$，即 $K(f)=K(K(A,f))\geqslant h/m>0$，这证明了(3). ▎

定理 2.7 在每个紧致 Hausdorff 拓扑群 G 上可有并且只有一种方法建立不变积分.

证明 设 f 是 G 上连续函数，令

$$\int f(x)\mathrm{d}x=K(f).$$

由引理2.6，易知这样定义 G 上不变积分，满足定义2.3的(1)～(4). 进一步假定我们已经用一种方式定义了 G 上不变积分 $\int^* f(x)\mathrm{d}x$，它也满足定义2.3的(1)～(4). 设 p 是 f 的右平均数，则对任给正数 ε，存在 G 中有限子集 A 使得

$$|K(A,f;x)-p|<\varepsilon,$$

于是

$$\begin{aligned}\left|\int^* K(A,f;x)\mathrm{d}x-p\right|&=\left|\int^*\sum_{i=1}^{m}\frac{f(xa_i)}{m}\mathrm{d}x-p\right|\\&=\left|\int^* f(x)\mathrm{d}x-p\right|<\varepsilon.\end{aligned}$$

由于 ε 的任意性及 $K(f)=p$，有

$$\int^* f(x)\mathrm{d}x=K(f).$$

这样，我们已经证明了满足定义2.3中的(1)～(4)的不变积分

是唯一存在的，剩下来只要证明定义2.3中的(5)也成立.令

$$\int^{*} f(x)\mathrm{d}x = \int f(x^{-1})\,\mathrm{d}x,$$

可以验证这样定义的不变积分满足定义2.3中的(1)～(4)，例如

$$\int^{*} f(xa)\mathrm{d}x = \int f(x^{-1}a)\,\mathrm{d}x = \int f((a^{-1}x)^{-1})\,\mathrm{d}x$$

$$= \int f(x^{-1})\mathrm{d}x = \int^{*} f(x)\mathrm{d}x.$$

根据前面所证的唯一性，有 $\int f(x^{-1})\,\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x.$ ∎

如果我们考虑定义在 G 上的复值函数 f，则存在 G 上实值函数 g 与 h 使得 $f=g+\mathrm{i}h$. 当 g 与 h 都连续时，称 f 为连续的. 进一步令

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(x)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int h(x)\mathrm{d}x,$$

可以验证这样定义的复函数的积分也满足定义2.3中的(1)～(5)，只要规定 $f\geqslant 0$当且仅当 $f=g\geqslant 0$，从而

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

设 N 与 H 是两个紧致 Hausdorff 拓扑群，$G=N\times H$ 是它们的拓扑积，f 是两个变量 $x\in N, y\in H$ 的连续函数，从而是一个变量 $z=(x,y)\in G$ 的连续函数. 当 y 固定时，函数 f 是 $x\in N$ 的连续函数，于是有 $\int_N f(x,y)\mathrm{d}x = g(y)$，$g$ 是定义在 H 上的连续函数. 这样，我们可以考虑 $\int_H\left(\int_N f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$. 类似的，可以考虑 $\int_N\left(\int_H f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

命题 2.8 在上面的假设下，有

$$\int_H\left(\int_N f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_N\left(\int_H f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_G f(z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_H\int_N f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证明 令$\int_G^* f(z)\mathrm{d}z=\int_H\left(\int_N f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$，易知这样定义的积分$\int_G^* f(z)\mathrm{d}z$满足定义2.3的(1)～(5)，例如

$$\begin{aligned}\int_G^* f(z^{-1})\mathrm{d}z &= \int_H\left(\int_N f(x^{-1},y^{-1})\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_H\left(\int_N f(x,y^{-1})\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_H\left(\int_N f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ &= \int_G^* f(z)\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

由定理2.6，根据不变积分的唯一性，我们有

$$\int_H\left(\int_N f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=\int_G f(z)\mathrm{d}z.$$

同样可证

$$\int_N\left(\int_H f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_G f(z)\mathrm{d}z. \quad \blacksquare$$

例 1 设G是实数$\boldsymbol{R}$的加法拓扑群，φ是G上周期为1的连续周期函数，即对每个$x\in G$有$\varphi(x+1)=\varphi(x)$. 设N是G中所有整数$\boldsymbol{Z}$所成的子群. 由于φ的周期性，对于每个陪集$x+N$，φ的取值是常数，因此φ与定义在$G/N=K$上的连续函数f相对应，并且每个定义在K上的连续函数f可由这种方式得到. 又因为K是紧致的，可以考虑满足定义2.3的积分$\int_{G/N}f(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}$，并且有

$$\int_{G/N}f(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}=\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

其中$\int_0^1\varphi(x)\mathrm{d}x$是通常的实函数积分，$\bar{x}$是$x$在$\boldsymbol{R}\to K$下的像.

如果考虑定义在G上的连续的复函数全体所成的$\boldsymbol{C}$-向量空间$\mathscr{F}_C(G)$，对任意的$f,g\in\mathscr{F}_C(G)$，通过

$$(f,g)=\int\overline{f(x)}g(x)\mathrm{d}x$$

定义 Hermite 内积，使 $\mathscr{F}_C(G)$ 成为一个酉空间，其中 $\overline{f(x)}$ 表示 $f(x)$ 的共轭复数. 如果只考虑定义在 G 上的实连续函数，那么 $\mathscr{F}_R(G)$ 关于上面定义的内积成为一个欧氏空间.

通常称 $\sqrt{(f,f)}$ 为 f 的**模**，记为 $\|f\|$，并且有

$$|(f,g)|^2 \leqslant (f,f)(g,g),$$
$$\|f+g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$$

如果 $(f,g)=0$，就称 f 与 g **正交**，如果进一步有 $\|f\|=\|g\|=1$，就称 f 与 g **正规正交**，并且把 f 与 g 称为**正规的**.

习　题

1. 证明不等式

$$\left|\int \overline{f(x)}g(x)\mathrm{d}x\right|^2 \leqslant \int \overline{f(x)}f(x)\mathrm{d}x \int \overline{g(x)}g(x)\mathrm{d}x.$$

2. 证明命题2.8前所考虑的函数 $g(y)=\int f(x,y)\mathrm{d}x$ 是 H 上连续函数.

3. 设

$$\begin{aligned} G=SU(1,1) &= \left\{A\in SL_2(\boldsymbol{C}) \,\middle|\, \overline{A}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ \overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix} \,\middle|\, |a|^2-|b|^2=1\right\}, \end{aligned}$$

又设 $\mathscr{D}=\{z\in\boldsymbol{C}\mid |z|<1\}$ 是复平面上单位圆面. 定义 G 在 $\mathscr{D}$ 上的作用为

$$A(z)=\frac{az+\overline{b}}{bz+\overline{a}}, \quad A\in G, z\in\mathscr{D},$$

若 $K=\{A\in G\mid A(0)=0\}=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & \overline{a}\end{pmatrix} \,\middle|\, |a|^2=1\right\}$，试证明

(1) G/K 与 $\mathscr{D}$ 同胚；

(2) 若 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G$，$A(0)=z$，记 $\delta(A)=d$，则

$$|\delta(A)|^2=\frac{1}{1-|z|^2};$$

(3) 对于 $\mathscr{D}$ 上连续函数 $f(z)$，$\int \frac{f(z)}{1-|z|^2}\mathrm{d}z$ 是 G-不变积分.

4. 证明 $\int \frac{f(x)}{(\det x)^n}\mathrm{d}x$ 是拓扑群 $G=GL_n(\boldsymbol{R})$ 的(左)不变积分.

5. 设 G 与 H 是紧致 Hausdorff 拓扑群，$\pi: G\to H$ 是连续满同态，$K=\mathrm{Ker}\pi$ 是 G 的闭子群. 证明：可以通过在 H 与 K 上定义不变积分来定义 G 上的不变积分，即对于 G 上连续函数 $f(x)$，定义

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x = \int_H \bar{f}(z)\mathrm{d}z,$$

其中

$$\bar{f}(\pi(x)) = \int_K f(xy)\mathrm{d}y$$

是 H 上连续函数.

6. 设 G 是紧致 Hausdorff 拓扑群，H 是 G 的连通闭子群，$\pi: G\to G\backslash H$ 是典范射影. 证明

(1) 对于 $G\backslash H$ 上连续函数 $g(xH)$，$x\in G$，可以在齐性空间 $G\backslash H$ 上定义积分

$$\int_{G\backslash H} g(xH)\mathrm{d}(xH),$$

它满足定义2.3中的线性、正规性与不变性，并且

$$\int_{G\backslash H} g(xH)\mathrm{d}(xH) = \int_{G\backslash H}\left(\int_H g(\pi(xy))\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}(xH)$$
$$= \int_G g(\pi(x))\,\mathrm{d}x;$$

(2) 对于 G 上连续函数 $f(x)$，有

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x = \int_{G\backslash H}\left(\int_H f(xy)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}(xH).$$

§3 紧致拓扑群的线性表示

在这一节我们总假定所有的拓扑群是紧致的 Hausdorff 群.

定义 3.1 设 G 是紧致 Hausdorff 拓扑群，V 是 n 维 $\boldsymbol{C}$-向量空间(或 $\boldsymbol{R}$-向量空间)，则拓扑群同态 $\rho: G \to GL(V)$ 称为 G 的**复线性表示(或实线性表示)**.

与有限群的线性表示相平行，我们可以定义线性表示的次数、同构以及在表示空间的一个适当选取的基下的矩阵等等.

对任意的 $x \in G$，设$(f_{ij}(x))$是 $\rho(x)$关于 V 的一个基$\{v_1, \cdots, v_n\}$所对应的矩阵，则每个 f_{ij}作为 G 上函数是连续的.

定理 3.2 若 $\rho: G \to GL(V)$是拓扑群 G 的一个复线性表示，则可以适当选取 V 的一个基使得每个 $\rho(x)$所对应的矩阵是酉矩阵.

证明 设$\{v_1, \cdots, v_n\}$是 V 的一个基，对任意的 $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$，$v = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \in V$，其中 $\alpha_i, \beta_i \in \boldsymbol{C}$，通过

$$\psi(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i \beta_i$$

在 V 上定义正定 Hermite 内积. 然后对每个 $x \in G$，由

$$\psi_x(u, v) = \psi(\rho_x(u), \rho_x(v))$$

定义 V 上正定的 Hermite 内积. 再通过

$$\varphi(u, v) = \int \psi_x(u, v) \mathrm{d}x$$

在 V 上定义了新的正定 Hermite 内积. 由于对每个 $y \in G$，

$$\varphi(\rho_y(u), \rho_y(v)) = \int \psi_x(\rho_y(u), \rho_y(v)) \mathrm{d}x = \int \psi(\rho_{xy}(u), \rho_{xy}(v)) \mathrm{d}x$$

$$= \int \psi_{xy}(u, v) \mathrm{d}x = \int \psi_x(u, v) \mathrm{d}x = \varphi(u, v),$$

因此这样定义的 Hermite 内积 $\varphi(\ ,\ )$是 G-不变的. 现在可以在 V 中选取一个基$\{w_1, \cdots, w_n\}$使得它关于 $\varphi(\ ,\ )$是正规正交的，即

$$\varphi(w_i, w_j) = \delta_{ij}.$$

于是对每个 $x \in G$，$\rho(x)$关于基$\{w_1, \cdots, w_n\}$的矩阵是酉矩阵. ▌

为了以后讨论方便，我们将随意地把$\rho(x)$或者理解为V上的线性变换，或者理解为在V的一个基下所对应的矩阵，并且把复(或实)线性表示统称为G的线性表示.

定义 3.3 设$\rho: G\to GL(V)$是拓扑群G的一个线性表示，ρ的特征标χ是定义在G上的函数使得

$$\chi(x)=\mathrm{tr}(\rho_x),\quad x\in G,$$

有时也用χ_ρ或χ_V来记G的这个特征标. 显然，χ是G上连续的类函数.

与有限群的情形一样，拓扑群G的每个线性表示是完全可约的，它可以分解为有限个不可约线性表示的和，从而对应的特征标是有限个不可约特征标的和，即

$$\chi=\chi_1+\chi_2+\cdots+\chi_n.$$

定理 3.4 设$\rho: G\to GL(V)$与$\tau: G\to GL(W)$是拓扑群G的两个不可约线性表示，χ_ρ与χ_τ分别是它们的特征标. 对$x\in G$，$\rho(x)=(f_{ij}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$与$\tau(x)=(g_{ij}(x))_{1\leqslant i,j\leqslant m}$分别是对应的$n$阶与$m$阶酉矩阵，则有下列正交关系成立：

$$\int f_{ij}(x)\overline{g_{kl}(x)}\mathrm{d}x=0,\qquad \rho\not\cong\tau\text{ 时},$$

$$\int f_{ij}(x)\overline{f_{kl}(x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\delta_{ik}\delta_{jl},\quad \rho\cong\tau\text{ 时}.$$

进一步还有

$$\int\chi_\rho(x)\overline{\chi_\rho(x)}\mathrm{d}x=1,\quad \rho\cong\tau\text{ 时},$$

$$\int\chi_\rho(x)\overline{\chi_\tau(x)}\mathrm{d}x=0,\quad \rho\not\cong\tau\text{ 时}.$$

证明 设A是$n\times m$-矩阵，考虑表达式$\int\rho(x)A\tau(x)^{-1}\mathrm{d}x$，这是一个$n\times m$-矩阵，其中每个元素是矩阵$\rho(x)A\tau(x)^{-1}$的相应位置上的元素(它们都是$G$上连续函数)的积分. 对每个$y\in G$，有

$$\rho(y)\left(\int\rho(x)A\tau(x)^{-1}\mathrm{d}x\right)\tau(y)^{-1}=\int\rho(yx)A\tau(yx)^{-1}\mathrm{d}x$$

$$= \int \rho(x) A \tau(x)^{-1} \mathrm{d}x.$$

当 $\rho \cong \tau$ 时，可设 $\rho = \tau$. 由于与所有矩阵可交换的 n 阶矩阵只有纯量阵，因此上述等式表明 $\int \rho(x) A \rho(x)^{-1} \mathrm{d}x = \alpha I$，其中 α 是纯量，I 是 n 阶单位矩阵. 但是

$$n\alpha = \mathrm{tr}\left(\int \rho(x) A \rho(x)^{-1} \mathrm{d}x\right) = \int \mathrm{tr}(\rho(x) A \rho(x)^{-1}) \mathrm{d}x$$

$$= \int \mathrm{tr}(A) \mathrm{d}x = \mathrm{tr}(A),$$

所以 $\alpha = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A)$. 考虑到 $\rho(x)^{-1} = \overline{\rho(x)}^{\mathrm{T}}$，取 $A = e_{jl}$，即 A 的第 j 行第 l 列元素为1，其余元素全为0，于是我们得到

$$\int f_{ij}(x) \overline{f_{kl}(x)} \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \delta_{ik} \delta_{jl}.$$

因为 $\chi_\rho(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{ii}(x)$，上面的等式表明

$$\int \chi_\rho(x) \overline{\chi_\rho(x)} \mathrm{d}x = 1.$$

当 $\rho \not\cong \tau$ 时，如果把 $\int \rho(x) A \tau(x)^{-1} \mathrm{d}x$ 看作从 V 到 W 的一个线性映射，由于 V 与 W 是不同构的单模，根据 Schur 引理，有

$$\int \rho(x) A \tau(x)^{-1} \mathrm{d}x = 0.$$

注意到 $\tau(x)^{-1} = \overline{\tau(x)}^{\mathrm{T}}$，取 $A = e_{jl}$，我们有

$$\int f_{ij}(x) \overline{g_{kl}(x)} \mathrm{d}x = 0.$$

又因为 $\chi_\rho(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{ii}(x)$，$\chi_\tau(x) = \sum_{i=1}^{m} g_{ii}(x)$，所以

$$\int \chi_\rho(x) \overline{\chi_\tau(x)} \mathrm{d}x = 0. \quad \blacksquare$$

设 Δ 是拓扑群 G 的互不同构的不可约线性表示的特征标的集合，定理3.4告诉我们，Δ 是 G 上正规正交的函数组. 对于 G 的任意一个线性表示 ρ，有

$$\chi_\rho = \sum_{i=1}^{n} m_i \chi_i,$$

其中 m_i 是非负整数，$\chi_i \in \Delta, 1 \leqslant i \leqslant n$.

$$m_k = \int \chi_\rho(x) \overline{\chi_k(x)} \mathrm{d}x$$

是 χ_ρ 关于函数组 Δ 的 Fourier 系数，并且有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^2 = \int \chi_\rho(x) \overline{\chi_\rho(x)} \mathrm{d}x,$$

因此，线性表示 ρ 不可约的充分必要条件是

$$\int \chi_\rho(x) \overline{\chi_\rho(x)} \mathrm{d}x = 1.$$

为了证明重要的 Peter-Weyl 定理，我们必须做一系列准备工作.

设 k 是定义在 G 上两个变量的连续实函数，对 $x, y \in G$ 有 $k(x,y) = k(y,x)$. 考虑积分方程

$$\varphi(x) = \lambda \int k(x,y) \varphi(y) \mathrm{d}y,$$

函数 $k(x,y)$ 称为这个方程的**核**，实数 $\lambda(\neq 0)$ 为 $k(x,y)$ 的**特征值**，连续实函数 $\varphi(\neq 0)$ 为 $k(x,y)$ 的属于特征值 λ 的**特征函数**. 易证，属于特征值 λ 的 $k(x,y)$ 的所有特征函数以及恒等于零的函数一起成为一个有限维实向量空间 R_λ，我们把 R_λ 的维数称为特征值 λ 的**重数**，并且属于不同特征值的特征函数是互相正交的. 把属于每个特征值 λ 的特征子空间 R_λ 中任意取出的正规正交基合并在一起，得到一个正规正交的函数组，称为 $k(x,y)$ 的特征函数的**基础组**. 若 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ 是 $k(x,y)$ 的特征函数的正规正交组，分别属于特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$（可以相等），则可证明

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(\varphi_i(x))^2}{\lambda_i^2} \leqslant \int (k(x,y))^2 \mathrm{d}y,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2} \leqslant \iint (k(x,y))^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

我们把证明作为练习留给读者，如何具体构作 $k(x,y)$ 的特征函数的基础组，是一件十分繁琐的工作，我们不在这里赘述，读者可以参考[P1] § 30,C. 设

$$\cdots,\varphi_{-2},\varphi_{-1},\varphi_1,\varphi_2,\cdots$$

是核 $k(x,y)$ 的特征函数基础组，函数 φ_n 属于特征值 $\lambda_n(n=\pm1,\pm2,\cdots)$，使得两组序列 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots$ 与 $-\lambda_{-1},-\lambda_{-2},\cdots$ 都是不降的序列. 那么我们可以证明下面有用的

命题 3.5 设 $k(x,y)$ 如前所述，g 是 G 上的连续函数，则函数 $f(x)=\int k(x,y)g(y)\mathrm{d}y$ 分解成一致且绝对收敛的级数

$$f(x)=\sum_n\psi_n(x),$$

其中 $\psi_1,\psi_2,\cdots$ 是 $k(x,y)$ 的特征函数.

证明 设 $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbf{Z}-\{0\}}$ 是 $k(x,y)$ 的特征函数的基础组，$b_i=\int g(x)\overline{\varphi_i(x)}\mathrm{d}x$ 是函数 g 关于基础组的 Fourier 系数，则函数 f 关于这个基础组的 Fourier 系数是 $\int f(x)\overline{\varphi_i(x)}\mathrm{d}x=\frac{b_i}{\lambda_i},i\in\mathbf{Z}-\{0\}$.

由于对任意有限个指标 i 求和时有

$$\begin{aligned}\left(\sum\left|\frac{b_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)\right|\right)^2&\leqslant\left(\sum b_i^2\right)\left(\sum\frac{(\varphi_i(x))^2}{\lambda_i^2}\right)\\&\leqslant\left(\sum b_i^2\right)\int(k(x,y))^2\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

作为函数 g 的 Fourier 函数，它们的平方和所成的级数是收敛的，因此对任给正数 ε 存在充分大的 p，使得当 i 取任意有限组指标且这些指标都超过 p 时，和 $\sum b_i^2<\varepsilon$. 又因为函数 $\int(k(x,y))^2\mathrm{d}y$ 是有界的，根据 Cauchy 收敛法则，级数

$$\sum\frac{b_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)$$

是一致且绝对收敛的. 设 f' 是这个级数的和，h 是 G 上任意的连续函数，则有

$$\int\left(f(x)-\sum_{i=1}^{m}\frac{b_{-i}}{\lambda_{-i}}\varphi_{-i}(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{\lambda_i}\varphi_i(x)\right)h(x)\mathrm{d}x$$
$$=\iint\left(k(x,y)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\varphi_{-i}(x)\varphi_{-i}(y)}{\lambda_{-i}}\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}\right)g(x)h(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

当 $m\to\infty, n\to\infty$ 时,由上式可得

$$\int(f(x)-f'(x))h(x)\mathrm{d}x=0,$$

从而 $f-f'=0$,即 $f=f'$. ▌

例1 继续§2例1的讨论,考虑实函数 $\varphi_n(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi nx}, x\in\boldsymbol{R}$, $n\in\boldsymbol{Z}$,显然 $\varphi_n(x)$ 的周期是1,因此可以作为定义在 K 上的函数. 容易验证,函数组 $\{\varphi_n(x)\}_{n\in Z}$ 是 K 上正规正交的函数组.

定义 3.6 设 Δ 是定义在 G 上实函数的集合(或复函数的集合),若对于 G 上每个实函数(或复函数) f 及任给正数 ε,存在 Δ 中函数 $f_1,\cdots,f_n$ 及实数(或复数) $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$,使得

$$\left|f(x)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i(x)\right|<\varepsilon,\quad x\in G,$$

则称 Δ 为**一致完全函数组**.

定理 3.7(Peter-Weyl) 在拓扑群 G 的全部互不同构的不可约线性表示(在适当选取基下)所对应的酉矩阵中,作为元素出现的连续函数 f_{ij} 的全体所成的集合 Δ 是一致完全的复函数组.

证明 设 k 是 G 上实函数,满足 $k(z^{-1})=k(z)$. 考虑方程

$$\varphi(x)=\lambda\int k(x^{-1}y)\varphi(y)\mathrm{d}y.$$

设 Δ' 是所有形如 $k(x^{-1}y)$ 的核的全部特征函数的集合,则可证 Δ' 是一致完全的实函数组.

设 f 是 G 上任意的实函数,由于紧致群上连续函数一定是一致连续的,因此对任给正数 ε,存在 G 的恒等元 1 的邻域 U 使得 $x^{-1}y\in U$ 时有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2,$$

且 $U^{-1}=U$. 设 V 为恒等元 1 的邻域使得 $\overline{V}\subset U$, 则由 Урысон 引理(见附录 A 中命题 A. 10(4)), 存在 G 上连续函数 q: $G\to[0,1]$, 当 $z\in\overline{V}$ 时 $q(z)=1$, 当 $z\in G-U$ 时 $q(z)=0$. 令 $k'(z)=\alpha(q(z)+q(z^{-1}))$, 其中 α 是使 $\int k'(z)\mathrm{d}z=1$的正实数. 函数 $k'(z)$ 只在 U 上不恒等于零, 且满足 $k'(z)=k'(z^{-1})$. 再令

$$f'(x)=\int k'(x^{-1}y)f(y)\mathrm{d}y,$$

则有

$$|f'(x)-f(x)|=\left|\int k'(x^{-1}y)(f(y)-f(x))\mathrm{d}y\right|$$

$$<\int k'(x^{-1}y)\frac{\varepsilon}{2}\mathrm{d}y=\frac{\varepsilon}{2}.$$

由命题3.5, 函数 f' 可分解成一致且绝对收敛的级数

$$f'(x)=\varphi_1(x)+\cdots+\varphi_n(x)+\cdots,$$

其中 φ_i 是 $k'(x^{-1}y)$ 的特征函数, $i=1,2,\cdots$. 因此存在充分大的 n 使得

$$f''(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)$$

满足

$$|f'(x)-f''(x)|<\varepsilon/2,$$

于是

$$|f(x)-f''(x)|<\varepsilon,$$

即 Δ' 是一致完全的实函数组.

其次, 以 Δ''表示 G 的所有线性表示所对应的酉矩阵中作为元素出现的连续函数全体所成的集合, 我们可以证明 Δ''是一致完全的复函数组. 为此只要证明: 对于任意的 $k(x^{-1}y)$ 的属于特征值 λ 的特征子空间的正规正交基$\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$都可以用 Δ''的函数线性表示.

设 $\varphi(x)$满足方程

$$\varphi(x) = \lambda\int k(x^{-1}y)\varphi(y)\mathrm{d}y,$$

则对任意的 $a\in G$,$\varphi(ax)$也满足上述方程. 因此,函数 $\varphi_1(ax),\cdots,\varphi_n(ax)$可由 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$线性表示,即有

$$\varphi_i(ax) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(a)\varphi_j(x).$$

进一步因为

$$\int\varphi_i(ax)\varphi_j(ax)\mathrm{d}x = \int\varphi_i(x)\varphi_j(x)\mathrm{d}x = \delta_{ij},$$

所以$\{\varphi_1(ax),\cdots,\varphi_n(ax)\}$也是一个正规正交基,从而矩阵$g(x)=(g_{ij}(x))$是可逆的,并且有

$$g_{ij}(a) = \int\varphi_i(ax)\varphi_j(x)\mathrm{d}x$$

是 G 上连续函数. 注意到对任意的 $a,b\in G$,有

$$\varphi_i(abx) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(ab)\varphi_j(x),$$

及

$$\varphi_i(abx) = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}(a)\varphi_k(bx) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g_{ik}(a)g_{kj}(b)\varphi_j(x),$$

因此有

$$g_{ij}(ab) = \sum_{k=1}^{n} g_{ik}(a)g_{kj}(b),$$

即

$$g(ab) = g(a)g(b).$$

于是 g 定义了 G 的一个线性表示,所有函数 $g_{ij}\in\Delta''$. 特别,取 $x=1$ 时,有

$$\varphi_i(a) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(a)\varphi_j(1),$$

即$\{\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)\}$可以用 Δ''的函数线性表示.

最后证明 Δ''的每个函数都可以用 Δ 中的函数线性表示. 显然,$\Delta\subset\Delta''$. 设 p 是 Δ''中任意函数,则存在 G 的一个复线性表示 ρ,

$\rho(x)=(f_{ij}(x))$，使得 p 是函数 f_{ij}中的一个. 于是存在矩阵 T 使得

$$\rho(x) = TD(x)T^{-1},$$

其中 $D(x)=\mathrm{diag}(\rho_1(x),\cdots,\rho_t(x))$是分块对角矩阵，$\rho_1(x),\cdots,\rho_t(x)$是 G 的不可约线性表示对应的酉矩阵，它们的元素都是 Δ 中函数. 因此 p 可以由 Δ 中函数线性表示. ▎

推论 3.8 设 $x\in G$ 且 $x\neq 1$，则存在 G 的不可约线性表示 ρ，使得 $\rho(x)$不是单位矩阵.

证明 因为 $x\neq 1$，由 Урысон 引理，存在 G 上连续函数 f 使得 $f(x)\neq f(1)$. 设若不然，即对 G 的每个不可约线性表示 ρ 有 $\rho(x)=\rho(1)$，则对于 Δ 中所有的函数 f_{ij}有 $f_{ij}(x)=f_{ij}(1)$. 因此不可能用 Δ 中函数的线性组合来逼近 f，这与 Peter-Weyl 定理矛盾. ▎

Peter-Weyl 定理告诉我们：Δ 张成 G 上复连续函数空间 $\mathscr{F}_C(G)$的一个稠密子空间.

令 Σ 是 G 上所有不可约复线性表示的特征标的集合，则 Σ 张成 G 上复连续类函数空间 $F_C(G)$的一个稠密子空间.

定理 3.9 对于定义在 G 上的每个复连续类函数 f 及任给正数 ε，存在具有复系数的线性组合 $f'(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\chi_i(x)$，使得

$$|f(x)-f'(x)|<\varepsilon,$$

其中 $\chi_i\in\Sigma,\alpha_i\in\boldsymbol{C},i=1,\cdots,n$. ▎

推论 3.10 设 $x,y\in G$ 是两个不共轭的元素，则存在 G 的不可约复线性表示的特征标 χ，使得 $\chi(x)\neq\chi(y)$. ▎

定理3.9与推论3.10的证明本质上与定理3.7与推论3.8的证明是一致的，我们把它们作为练习留给读者，也可以参考[P1] §33的定理34与定理35.

定理 3.11 若 G 是交换拓扑群，则 G 的每个不可约线性表示是 1 次的，从而不可约线性表示 ρ 与它的特征标 χ 是一致的.

证明 设 ρ 是一个不可约线性表示，与每个 $\rho(x)$可交换的矩

阵一定是纯量阵，但是不可约的纯量阵一定是1阶的，因此定理成立. ▌

例 2 平面上的旋转群 C_∞.

如果用 r_α 表示平面上绕定点旋转 α 角，对于交换群 C_∞，它的不可约线性表示都是1次的，特征标由

$$\chi_n(r_\alpha) = e^{in\alpha}, \quad n \in Z$$

给出，并且

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-im\alpha} e^{in\alpha} d\alpha = \delta_{mn}$$

给出特征标之间的正交关系. 设 f 是以 2π 为周期的复连续函数，则 f 的 Fourier 展开为

$$f(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\chi_n, f)\chi_n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{in\alpha}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\alpha} f(\alpha) d\alpha.$$

例 3 二面体群 D_∞.

保持平面上原点不动的旋转与反射所成的群 D_∞ 中，设 r_α 是绕原点旋转 α 角，s 表示关于过原点的直线的反射，则 r_α 与 s 满足关系式

$$s^2 = 1, \quad sr_\alpha s = r_{-\alpha},$$

因此，D_∞ 中元素可以唯一地写成 r_α 或 sr_α 的形式. 设 f 是 D_∞ 上复连续函数，它在 D_∞ 上的积分是

$$\int f(x)dx = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(r_\alpha)d\alpha + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} f(sr_\alpha)d\alpha.$$

与 D_n 的情形相类似(见第二章 § 5例4)，D_∞ 有两个1次不可约线性表示，它们的特征标是

特征标 \ 代表元	r_α	sr_α
ψ_1	1	1
ψ_2	1	-1

D_∞ 还有一族2次不可约线性表示 $\{\rho^{(n)}\}$ $(n=1,2,\cdots)$，它们在适当选取的基下(见第二章 § 5例3)的矩阵是

$$\rho^{(n)}(r_\alpha)=\begin{pmatrix} e^{in\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-in\alpha} \end{pmatrix},\quad \rho^{(n)}(sr_\alpha)=\begin{pmatrix} 0 & e^{-in\alpha} \\ e^{in\alpha} & 0 \end{pmatrix},$$

对应的特征标 $\chi_n(n=1,2,\cdots)$有

$$\chi_n(r_\alpha)=2\cos n\alpha,\quad \chi_n(sr_\alpha)=0.$$

例 4 设 H 与 N 是两个拓扑群，$G=H\times N$ 是它们的拓扑积. 若 ρ 与 τ 分别是 H 与 N 的不可约线性表示，则 $\rho\otimes\tau$ 是 G 的不可约线性表示，它的特征标 χ，对任意的 $x\in H$ 及 $y\in N$，有 $\chi(x,y)=\chi_\rho(x)\chi_\tau(y)$，并且 G 的每个不可约线性表示都可以用这种方法构作出来.

例 5 群 $D_{\infty h}$的不可约线性表示的特征标.

群 $D_{\infty h}$是由 D_∞及关于原点的反射 t 生成的，因此 $D_{\infty h}$是 D_∞与 $I=\{1,t\}$的积，它的元素可以唯一地写成下述四种形式之一：

$$r_\alpha,\quad sr_\alpha,\quad tr_\alpha,\quad tsr_\alpha.$$

对于定义在 $D_{\infty h}$上的复连续函数 f，它的积分是

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}f(r_\alpha)\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}f(sr_\alpha)\mathrm{d}\alpha$$
$$+\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}f(tr_\alpha)\mathrm{d}\alpha+\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi}f(tsr_\alpha)\mathrm{d}\alpha.$$

与 D_{nh}的情形相类似(见第二章 § 5例3). 对于 D_∞的每个不可约特征标 χ，恰好定义了 $D_{\infty h}$的两个不可约特征标 χ_φ与 χ_ψ：

特征标 \ 代表元	x	tx
χ_φ	$\chi(x)$	$\chi(x)$
χ_ψ	$\chi(x)$	$-\chi(x)$

例 6 继续 § 2例1和本节例1的讨论. 考虑 1 阶矩阵 $\rho^{(n)}(x)=(\varphi_n(x))$，$\rho^{(n)}$是群 K 的线性表示，特征标就是 $\varphi_n(x)$. 由于不存在与所有 $e^{i2\pi nx}$都正交的正规函数，因此$\{\rho^{(n)}\}_{n\in Z}$就是 K 的全部不可约线性表示.

习　　题

1. 证明定理3.9与推论3.10.

2. 设 G 是交换的紧致 Hausdorff 拓扑群，ρ 是 G 的1次不可约线性表示，则对于每个 $x\in G$ 有 $|\rho(x)|=1$.

3. 设 G 是 Hausdorff 拓扑群，G 的开集基中存在最小基数的开集基，这个最小基数称为 G 作为拓扑空间的**权**. 试证明：当 G 是紧致拓扑群时，G 的不可约线性表示的同构类的集合的基数等于 G 的权.

4. 设 G 是紧致 Hausdorff 拓扑群，f 是 G 上平方可积的连续函数，Δ 是 G 的互不同构的不可约线性表示的特征标的集合，记 $\chi\in\Delta$ 与 f 的**卷积**

$$(\chi * f)(x)=\int\chi(y)f(y^{-1}x)\,\mathrm{d}y.$$

证明

(1) $f(x)=\sum\limits_{\chi\in\Delta}d_\chi(\chi * f)(x)$ 是 $f(x)$的 Fourier 展开，其中 d_χ 表示 χ 所对应的不可约线性表示的次数；

(2) 设$(\chi_{ij}(x))$是 χ 所对应的不可约线性表示在适当选取基下的酉矩阵，则 Plancherel 公式

$$\int|f(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{\chi\in\Delta}d_\chi\sum_{i,j=1}^{d_\chi}\int\left|f(x)\,\overline{\chi_{ij}(x)}\right|^2\mathrm{d}x$$

成立.

§4　局部紧致的拓扑交换群

本节所考虑的拓扑群都是局部紧致的 Hausdorff 交换群. 由于交换群 G 的不可约线性表示都是 1 次的，在适当选取基后对应的矩阵是酉矩阵，1阶酉矩阵恰好是模为 1 的复数，因此交换群 G 的不可约特征标 χ 都是从 G 到 S^1的拓扑群同态. 由 §1例3中(1)

知，乘法群 S^1 同构于加法群 $K=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$，如果我们把局部紧致的 Hausdorff 交换群 G 的运算用加法来表示，那么 G 的每个不可约特征标 χ 都是拓扑群同态

$$\chi:\ G \to K.$$

从而 G 的所有特征标的集合 $\hat{G}$ 通过定义加法

$$(\alpha+\beta)(x)=\alpha(x)+\beta(x),\quad x\in G,\alpha,\beta\in\hat{G}$$

成为一个群，它的恒等元 0 恰好是 G 的单位表示的特征标，通常称为 G 的**特征标群**. 进一步定义 $\hat{G}$ 的恒等元 0 的邻域

$$U(F,\varepsilon)=\left\{\chi\in\hat{G}\,\middle|\,|\chi(x)|<\varepsilon,\forall\ x\in F\right\},$$

其中 ε 是任给正数，F 是 G 的任意紧致子集，则所有这样的邻域 $U(F,\varepsilon)$ 的集合 Σ^* 成为 $\hat{G}$ 的恒等元0的完全邻域组. 我们把具体的验证作为练习留给读者，作为例子仅仅验证 Σ^* 满足 §1中命题1.3的(1). 设 $U(F_1,\varepsilon_1),U(F_2,\varepsilon_2)\in\Sigma^*$，则 $U(F_1\cup F_2,\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2))\in\Sigma^*$，并且 $U(F_1\cup F_2,\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2))\subset U(F_1,\varepsilon_1)\cap U(F_2,\varepsilon_2)$. 因此，$\hat{G}$ 也是一个交换拓扑群，又称为 G 的**对偶群**.

为了证明下面的一系列命题，我们先引入一些记号. 由于在实数的加法拓扑群 $\boldsymbol{R}$ 上采取通常的拓扑，在典范映射 $\kappa:\ \boldsymbol{R}\to K=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ 下，K 是一个紧致拓扑群. 对每个正整数 k，定义

$$W_k=\left\{\kappa(d)\,\middle|\,d\in\boldsymbol{R},|d|<\frac{1}{3k}\right\},$$

使得开集 $W_1,W_2,\cdots,W_k,\cdots$ 组成加法群 K 的恒等元 0 的完全邻域组. 并且容易证明：对任意的 $\alpha\in K$，当 $\alpha\in W_1,2\alpha\in W_1,\cdots,k\alpha\in W_1$ 时，一定有 $\alpha\in W_k$. 进一步，对任意的拓扑交换群 G，对任意的 $A\subset G,M\subset K$，定义

$$U(A,M)=\{\alpha\in\hat{G}\,|\,\alpha(A)\subset M\},$$

于是所有形如 $U(F,W_k)$ 的集合的集合也构成 $\hat{G}$ 的恒等元 0 的一个完全邻域组，其中 $F\subset G$ 是紧致的.

命题 4.1 若 G 是紧致交换拓扑群，则 $\hat{G}$ 是离散拓扑群；又

若 G 是离散交换拓扑群，则 $\hat{G}$ 是紧致拓扑群.

证明 若群 G 紧致，则 $\hat{G}$ 的恒等元 0 的完全邻域组中有一个邻域 $U=U(G,W_1)$，这里 $W_1,W_2,\cdots,W_k,\cdots$ 是加法群 K 的恒等元 0 的完全邻域组. 设 $\chi\in U$，则对任意的 $x\in G$ 及任意的正整数 k，由 $k\chi(x)=\chi(kx)\in W_1$，有 $\chi(x)\in W_k$，从而 $\chi(x)=0$，即 $U=\{0\}$，因此 $\hat{G}$ 是离散群.

若群 G 离散，考虑 $T=\bigoplus\limits_{x\in G}K_x$，它是紧致的，并且对每个 $\alpha\in T$，通过 $\alpha(x)=\alpha(K_x)(x\in G)$ 把 T 的元素看作是定义在 G 上的函数. 于是

$$\hat{G}=\{\alpha\in T\,|\,\alpha(x+y)=\alpha(x)+\alpha(y),x,y\in G\}$$

是 T 的闭子群，从而是紧致的. 注意到离散群 G 中每个紧致集是有限集，通过 T 诱导的 $\hat{G}$ 上的拓扑与 $\hat{G}$ 所定义的拓扑是一致的.

▌

命题 4.2 设 G 是局部紧致的交换拓扑群，则 $\hat{G}$ 也是局部紧致的交换拓扑群.

证明 设 V 是 G 中具有紧致闭包的零的邻域，必须证明 $\hat{G}$ 中恒等元0的邻域 $U(\overline{V},W_4)$ 的闭包是紧致的，但 $\overline{U(\overline{V},W_4)}\subset U(\overline{V},\overline{W}_4)$，因此，只要证明 $U(\overline{V},\overline{W}_4)$ 的紧致性. 在 G 中引入离散拓扑，以 G_* 表示这样得到的离散群，以 $U^*(\overline{V},\overline{W}_4)$ 表示满足条件 $\alpha^*(\overline{V})\subset\overline{W}_4$ 的群 $\hat{G}_*$ 的所有特征标 α^* 的集合. 对任意的正整数 k，选取 G 的恒等元 0 的邻域 V' 使得 $kV'\subset V$. 对每个 $x\in V'$，由 $k\alpha^*(x)=\alpha^*(kx)\in\overline{W}_4\subset W_1$，有 $\alpha^*(x)\in W_k$，即 $\alpha^*(V')\subset W_k$，从而 α^* 在 G 上连续. 因此有 $U(\overline{V},\overline{W}_4)=U^*(\overline{V},\overline{W}_4)$；并且

$$U^*(\overline{V},\overline{W}_4)=\bigcap_{x\in\overline{V}}U^*(\{x\},\overline{W}_4)$$

是闭集的交集，因此 $U^*(\overline{V},\overline{W}_4)$ 是 $\hat{G}_*$ 中闭集.

最后只要证明从 $\hat{G}$ 与从 $\hat{G}_*$ 所诱导的集合 $U(\overline{V},\overline{W}_4)$ 上的拓扑是一致的，就证明了 $U(\overline{V},\overline{W}_4)$ 的紧致性. 对于 $\alpha\in U(\overline{V},\overline{W}_4)$，在由 $\hat{G}$ 诱导的拓扑中，α 的邻域为 $\alpha+U(F,W_k)\subset U(\overline{V},\overline{W}_4)$，其

中 $F\subset G$ 是紧致的. 而由 $\hat{G}_*$ 诱导的拓扑中, α 的邻域为 $\alpha+U^*(A, W_{k'})\subset U^*(\bar{V},\bar{W}_4)$, 其中 $A\subset G_*$ 是有限集. 因为有限集是紧致的, 所以第二种形式的每个邻域含有第一种形式的某邻域. 进一步可以证明第一种形式的每个邻域含有第二种形式的邻域, 从而这两种拓扑等价. 对于固定的 F 与 k, 由 $\alpha\in U(\bar{V},\bar{W}_4)$ 及 $\alpha+\xi^*\in U^*(\bar{V},\bar{W}_4)$, 所以 $\xi^*\in U^*(\bar{V},\bar{W}_2)$. 选取 G 的恒等元0的邻域 V'' 使得 $2kV''\subset V$, 由于对每个 $x\in V''$, $2k\xi^*(x)=\xi^*(2kx)\in\bar{W}_2\subset W_1$, 有 $\xi^*(x)\in W_{2k}$, 即 $\xi^*(V'')\subset W_{2k}$. 其次, 形如 $a+V''(a\in F)$ 的开集全体覆盖 F, 因此存在有限集 $A\subset F$ 使得 $F\subset A+V'$. 假定 $\xi^*\in U^*(A,W_{2k})$, 则 $\xi^*(F)\subset\xi^*(A+V'')\subset W_{2k}+W_{2k}\subset W_k$, 即 $\xi^*\in U^*(F,W_k)$. 此外 $\xi^*=(\alpha+\xi^*)-\alpha$, 而 $\alpha+\xi^*$ 与 α 都在 $U(\bar{V},\bar{W}_4)$ 中, 都是连续的, 因此 ξ^* 连续, 从而 $\xi^*\in U(F,W_k)$, 这证明了两种拓扑的等价性. ▌

例 1 (1) 无限循环群 $\mathbf{Z}$ 的特征标群 $\hat{\mathbf{Z}}\cong K$, 其中 K 是加法群.

因为 $\chi\in\hat{\mathbf{Z}}$ 由 $\chi(n)=na$ 给出, 其中 $n\in\mathbf{Z}, a\in K$, 所以由 $\chi\mapsto\chi(1)=a$ 给出单射 $\hat{\mathbf{Z}}\to K$, 其逆映射 $K\to\hat{\mathbf{Z}}$ 由 $a\mapsto\chi_a$ 给出, 其中 $\chi_a(1)=a\in K$.

(2) r 阶循环群 $\mathbf{Z}_r$ 的特征标群 $\hat{\mathbf{Z}}_r\cong\mathbf{Z}_r$.

(3) 拓扑群 K 的特征标群 $\hat{K}\cong\mathbf{Z}$.

拓扑群 K 的每个子群 N 或者等于 K, 或者是 r 阶循环群. 考虑典范映射 $\kappa:\mathbf{R}\to K=\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, 那么这个循环群由形如 $\kappa\left(\frac{p}{r}\right)$ $(p=0,1,\cdots,r-1)$ 的元素组成. 群 K 的自同构只有两个: 恒等映射 $x\mapsto x$ 及求逆映射 $x\mapsto -x$. 于是, 群 K 的特征标 χ 可以表成 $\chi(x)=mx(m\in\mathbf{Z})$ 的形式. 考虑由 $m\mapsto\chi_m$ 给出的映射 $\mathbf{Z}\to\hat{K}$, 其中 $\chi_m(x)=mx, x\in K$. 设 $N=\mathrm{Ker}\chi\subset K$. 若 $N=K$, 则 $\chi=\chi_0, \chi_0(x)=0, x\in K$. 若 N 是 r 阶循环群, 则 $K/N=K'$ 与 K 同构, 但 K 只有两个自同构, 因此 $\chi=\chi_r$ 与 $\chi=\chi_{-r}, r=1,2,\cdots$. 于是 $m\mapsto\chi_m$ 是一

个同构.

(4) 实数加法群 $\boldsymbol{R}$ 的特征标群 $\hat{\boldsymbol{R}}\cong\boldsymbol{R}$.

设 $\chi\in\hat{\boldsymbol{R}}$,则 $\chi(x)=\overline{dx}(d,x\in\boldsymbol{R})$是由实数 d 决定的,记为 χ_d. 于是由 $d\to\chi_d$ 给出映射 $\boldsymbol{R}\to\hat{\boldsymbol{R}}$. 设 $N=\mathrm{Ker}\chi$. 若 $N=\boldsymbol{R}$,则 $\chi=\chi_0$. 若 $N\neq\boldsymbol{R}$,则 N 中有最小正数 t 使得 N 是由 t 生成的无限循环群,从而 $\boldsymbol{R}/N$ 与 K 同构,但 K 只有两个自同构,因此 $\chi=\chi_{\frac{1}{t}}$与 $\chi=\chi_{-\frac{1}{t}}$,$t\in\boldsymbol{R}_+$. 于是 $d\mapsto\chi_d$ 是一个同构.

定义 4.3 设 A 是拓扑群 G 的子集,则

$$A^{\perp}=\{\chi\in\hat{G}\,|\,\chi(A)=0\}$$

称为 A 在 $\hat{G}$ 中的**零化子**.

下面讨论对偶群的若干性质.

命题 4.4 设 G_1,G_2是拓扑交换群,对 $\chi_i\in\hat{G}_i,x_i\in G_i(i=1,2)$,则由 $\theta(\chi_1,\chi_2)(x_1,x_2)=\chi_1(x_1)+\chi_2(x_2)$定义的映射 θ: $\hat{G}_1\times\hat{G}_2\to\widehat{G_1\times G_2}$为拓扑群同构.

证明 设 $\psi\in\widehat{G_1\times G_2}$,取 $\chi_1(x_1)=\psi(x_1,0),\chi_2(x_2)=\psi(0,x_2)$,则 $\psi=\theta(\chi_1,\chi_2)$,从而 θ 为满射,于是易知 θ 是群的同构.

若 $U(F,\varepsilon)$是$\widehat{G_1\times G_2}$的恒等元$(0,0)$的邻域,令 F_i 为 F 在 G_i 的投影,则

$$\theta\left(U\left(F_1,\frac{\varepsilon}{2}\right)\times U\left(F_2,\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\subset U(F,\varepsilon).$$

反之,若 $U(F_i,\varepsilon_i)$ 为 $\hat{G}_i$ 的恒等元0的邻域,$i=1,2$. 令 $\varepsilon=\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$,$F=(F_1,0)\cup(0,F_2)$,则

$$U(F,\varepsilon)\subset\theta(U(F_1,\varepsilon_1)\times U(F_2,\varepsilon_2)).$$

于是 θ 是同胚. ▌

命题 4.5 设 H 是拓扑交换群 G 的子群,则有拓扑群同构:

(1) $\widehat{G/H}\cong H^{\perp}$;

(2) 当 H 是开子群时,$\hat{G}/H^{\perp}\cong\hat{H}$.

证明 （1）由典范同态 $\pi: G\to G/H$ 定义映射 $\hat{\pi}:\widehat{G/H}\to\hat{G}$ 使得 $\xi\mapsto\xi\circ\pi$ 是一个群同态. 我们必须证明 $\hat{\pi}$ 给出了 $\widehat{G/H}$ 到 $H^{\perp}$ 的同构. 设 $\zeta\in H^{\perp}$，由于 $\zeta(H)=0$，ζ 在群 G 关于子群 H 的每一个陪集上取常值. 因此存在群同态 $\xi: G/H\to K$ 使得 $\zeta=\xi\circ\pi$. 为了证明 $\xi\in\widehat{G/H}$，只要证明 ξ 是连续的. 对于加法群 K 的恒等元 0 的邻域 W_k，由于 ζ 是连续的，存在 H 的（也是 G 的）恒等元 0 的邻域 V 使得 $\zeta(V)\subset W_k$，因此有 G/H 的恒等元 0 的邻域 $\pi(V)$ 使得 $\xi(\pi(V))\subset\zeta(V)\subset W_k$. 这样，我们已证明了 $\hat{\pi}(\widehat{G/H})=H^{\perp}$. 又因为 $\mathrm{Ker}\hat{\pi}=\pi(G)^{\perp}=(G/H)^{\perp}=\{0\}$，所以 $\hat{\pi}$ 是抽象群同构. 最后要证明 $\hat{\pi}$ 是开映射. 设 $U(E,W_k)$ 是 $\widehat{G/H}$ 的恒等元 0 的邻域，取 G 的具有紧致闭包的任意邻域 U，G/H 中紧致子集 E 含在有限个开集 $\pi(x_i+U)$ 的并集中，$x_i\in G$，$1\leqslant i\leqslant t$. 取 $F=\bigcup_{i=1}^{t}(x_i+\overline{U})$ 是 G 的紧致子集使得 $\pi(F)\supset E$. 现设 $\zeta\in H^{\perp}\cap U(F,W_k)$，则存在 $\xi\in\widehat{G/H}$ 使得 $\zeta=\xi\circ\pi$. 于是 $\xi(E)\subset(\xi\circ\pi)(F)=\zeta(F)\subset W_k$，从而 $\xi\in U(E,W_k)$ 及 $\hat{\pi}(U(E,W_k))\supset H^{\perp}\cap U(F,W_k)$，即 $\hat{\pi}$ 是开映射.

（2）考虑嵌入映射 $i:H\to G$，$\hat{i}:\hat{G}\to\hat{H}$ 使 $\chi\mapsto\chi\circ i$. 由 $\mathrm{Ker}\hat{i}=i(H)^{\perp}=H^{\perp}$，我们只要证明 $\hat{i}$ 是开且满的拓扑群同态. 设 $\eta\in\hat{H}$ 是子群 H 的任意特征标. 因为 H 是开的，所以 G 到 K 内的每个抽象群同态 χ，若在 H 上与 η 一致的话，一定是连续的. 因此我们只要扩充 η 为抽象群 G 的同态. 对 $x\notin H$，令 $H_1=\bigcup_{n\in Z}(nx+H)$. 若对一切 $n\geqslant 2$，$nx\notin H$，则令 $\eta_1(nx+h)=\eta(h)$，$h\in H$，$n\in\mathbf{Z}$. 若存在最小正整数 k 使得 $kx\in H$，则存在 $z\in K$ 使得 $kz=\eta(kx)$，从而令 $\eta_1(nx+h)=nz+\eta(h)$，$h\in H$，$n\in\mathbf{Z}$. 这样把 η 扩充到 H_1 上. 用 Zorn 引理，就把 η 扩充为抽象群 G 的同态. 于是 $\hat{i}$ 是满同态，从而是抽象群的同构.

现在证明同态 $\hat{i}$ 是开映射. 设 V 是 H 的恒等元 0 的邻域使得

$\overline{V}$ 是紧致的. 令 $U=U(\overline{V},W_1)$ 是 $\hat{G}$ 中恒等元 0 的对称邻域,$U'=U(\overline{V},W_1)$ 是 $\hat{H}$ 中恒等元0的对称邻域,则 $\hat{i}(U)=U'$. 令

$$\hat{G}_1=U\cup 2U\cup\cdots,\quad \hat{H}_1=U'\cup 2U'\cup\cdots,$$

则 $\hat{i}(\hat{G}_1)=\hat{H}_1$. 由本章 § 1习题13,$\hat{i}|_{\hat{G}_1}$是开映射,从而 $\hat{i}$ 是开映射.

▌

对于 G 的特征标群 $\hat{G}$,也可以定义 $\hat{G}$ 的特征标群 $\hat{\hat{G}}$. 于是对每个 $x\in G$,通过定义 $\delta(x):\hat{G}\to K,\chi\mapsto\chi(x)$,得到一个映射

$$\delta: G\to\hat{\hat{G}}.$$

命题 4.6 $\delta: G\to\hat{\hat{G}}$ 是连续同态.

证明 对任意的 $\chi,\chi'\in\hat{G}$,因为

$$\delta(x)(\chi+\chi')=(\chi+\chi')(x)=\chi(x)+\chi'(x)$$
$$=\delta(x)(\chi)+\delta(x)(\chi'),$$

所以 $\delta(x)$是 $\hat{G}$ 到 K 的抽象群同态. 又因为 $\delta(x)(U(x,W_k))\subset W_k$,所以 $\delta(x)\in\hat{\hat{G}}$. 对任意的 $x,y\in G,\chi\in\hat{G}$,因为

$$\delta(x+y)(\chi)=\chi(x+y)=\chi(x)+\chi(y)$$
$$=\delta(x)(\chi)+\delta(y)(\chi)=(\delta(x)+\delta(y))(\chi),$$

所以 δ 是 G 到 $\hat{\hat{G}}$ 的抽象群同态. 最后证明 δ 是连续的. 设 $U'=U(\Phi,W_k)$是 $\hat{\hat{G}}$ 的恒等元 0 的一个邻域,其中 Φ 是 $\hat{G}$ 的紧致子集,我们必须找出 G 的恒等元 0 的邻域 U 使得 $\delta(U)\subset U'$. 任取 G 的恒等元 0 的邻域 V 使得 $\overline{V}$ 紧致,令 $W=U(\overline{V},W_{2k})$,由于 $\{\chi+W|\chi\in\Phi\}$构成 Φ 的开覆盖,我们可以选取 Φ 的有限开覆盖 $\chi_1+W,\cdots,\chi_r+W$. 设 V_i 是 G 的恒等元 0 的邻域使得 $\chi_i(V_i)\subset W_{2k},i=1,\cdots,r$. 令 $U=V\cap V_1\cap\cdots\cap V_r$. 对任意的 $\chi\in\Phi$,存在 $i,1\leqslant i\leqslant r$,使得 $\chi=\chi_i+\chi_0$,其中 $\chi_0\in W$. 于是当 $x\in U$ 时,有 $\delta(x)(\chi)=\chi(x)=\chi_i(x)+\chi_0(x)\in W_{2k}+W_{2k}=W_k$,即 $\delta(U)\subset U'$. ▌

命题 4.7 (1) 若 G 为离散交换群,则 $\delta:G\to\hat{\hat{G}}$ 是拓扑群同构;

(2) 若 G 为紧致交换群,则 $\delta: G\to\hat{\hat{G}}$ 是拓扑群同构.

证明 (1) 设 H 是 G 的有限生成子群，根据有限生成 Abel 群的结构定理(例如参考[J1], p. 189), $H \cong m\mathbf{Z} \oplus D$，其中 $m\mathbf{Z} = \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbf{Z}}_{m\text{个}}$, D 是有限 Abel 群，它是素数幂阶循环群的直和. 由本节习题7及例1中(1),(2),(3)知 $\delta|_H: H \to \hat{\hat{H}}$ 是同构. 如果对每个 $a \in G$, $\delta(a) \in \hat{\hat{G}}$，存在 G 的有限生成子群 H，使得 $a \in H$, $\delta(a) \in \hat{\hat{H}}$，那么 δ 是同构.

设 U 是 $\hat{G}$ 的恒等元 0 的一个邻域，使得 $\delta(a)(U) \subset W_1$，考虑 $\hat{G}$ 中的子群集合 $\Delta = \{H^{\perp} \mid H$ 是 G 的有限生成子群$\}$，由于 $H_1^{\perp} \cap H_2^{\perp} = (H_1 + H_2)^{\perp}$，当 H_1, H_2 是有限生成子群时，$H_1 + H_2$ 也是有限生成子群，因此 Δ 是一个可乘集. 又因为 G 中每个元素含在某个有限生成子群中，所以 Δ 中所有子群的交集为 $\{0\}$. 再考虑形如 $(\hat{G} - U) \cap H^{\perp}$ 的闭集的集合 Δ'，其中 $H \in \Delta$. 显然 Δ' 中所有闭集的交集是 $(\hat{G} - U) \cap \{0\} = \varnothing$，因此在 Δ 中存在有限个子群 $H_1^{\perp}, \cdots, H_t^{\perp}$ 使得 $\bigcap_{i=1}^{t} H_i^{\perp} \subset U$. 于是取 H 为包含 $H_1 + \cdots + H_t$ 及 a 的最小子群，它是有限生成的且 $H^{\perp} \subset U$. 因为 $\delta(a)(H^{\perp}) \subset W_1$，对任意的 $\chi \in H^{\perp}$ 及任意的 k, $k\delta(a)(\chi) = \delta(a)(k\chi) \in W_k$，所以 $\delta(a)(\chi) = 0$，从而 $\delta(a)(H^{\perp}) = 0$，即 $\delta(a) \in (H^{\perp})^{\perp}$. 由本节习题 11, $\delta(a) \in \hat{\hat{H}}$.

(2) 首先证明 δ 是单一同态. 对每个 $a \in G$, $a \neq 0$，由本节习题 2，存在 $\chi \in \hat{G}$ 使得 $\chi(a) \neq 0$，于是 $\delta(a)(\chi) = \chi(a) \neq 0$, δ 是单一同态. 再注意到 $\hat{G}$ 是离散群，由(1), $\hat{G}$ 是 $\hat{\hat{G}}$ 的特征标群，对于 $\chi \in \hat{G}$，作为 $\hat{\hat{G}}$ 的特征标时，$\chi(\delta(a)) = \delta(a)(\chi) = \chi(a)$，所以 $\delta(G)^{\perp} = G^{\perp} = \{0\}$. 但是命题4.5(1)告诉我们，$\widehat{\hat{\hat{G}}/\delta(G)} \cong \delta(G)^{\perp} = \{0\}$，因此 $\delta(G) = \hat{\hat{G}}$, δ 是满同态. ▌

定义 4.8 若拓扑群 G 有紧致子集 F，使得 F 生成 G，即

$$G = \{0\} \bigcup_{n=1}^{\infty} n(F \cup (-F)),$$

则称 G 是**紧致生成的**.

当 G 是局部紧致的拓扑交换群时,若 G 是紧致生成的,则存在 G 的恒等元 0 的邻域 V,使得 $\overline{V}$ 是紧致的,并且

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} n(V \cup (-V)).$$

命题 4.9 设 G 是局部紧致的拓扑交换群,F 是 G 的紧致子集,则存在紧致生成的开子群 H,使得 $F \subset H$.

证明 设 W 是 G 的恒等元 0 的邻域使得 $\overline{W}$ 是紧致的,令 $V = W \cup (W+F)$,$U = V \cup (-V)$是 0 的对称邻域,且 $\overline{U}$ 是紧致的,于是 $H = U \cup 2U \cup \cdots$是所求的 G 的子群. ▌

如果我们把实数加法群 $\boldsymbol{R}$,加法群 K 及离散循环群 $\mathbf{Z}$ 及 $\mathbf{Z}_r$ 以及这些群的有限直和称为**初级群**,那么我们可以这样描述紧致生成的局部紧致交换群的结构.

定理 4.10 设 G 是紧致生成的局部紧致的 Hausdorff 交换群,则

(1) G 的恒等元 0 的每个邻域 V 中必含有紧致子群 H,使得商群 G/H 是初级群;

(2) G 可以分解成紧致子群与初级子群的直和;

(3) $G \cong \hat{\hat{G}}$. ▌

由于定理的证明涉及许多拓扑空间知识及其他数学知识,我们不准备仔细证明这个定理,有兴趣的读者可以参考[P1]§39或[FL]第三章§2.

定理 4.11 设 G 是局部紧致的 Hausdorff 交换群,则 $G \cong \hat{\hat{G}}$.

证明 设 H 是群 G 的紧致生成的开子群.由命题4.5,$\widehat{G/H} \cong H^{\perp}$,又由命题1.6,$G/H$ 是离散拓扑群,因此 $H^{\perp}$是紧致拓扑群.由本节习题11,$\hat{H} = (H^{\perp})^{\perp}$.但是定理4.10表明 $\delta|_H: H \to \hat{\hat{H}}$ 是同构,由命题4.7(1)的证明知 $\hat{\hat{H}} = U(H^{\perp}, W_1)$ 是 $\hat{\hat{G}}$ 中开子群,

所以 $\delta: G\to\hat{\hat{G}}$ 是拓扑群的开同态.

为了证明 δ 是同构，只要对每个 $a\in G$，总可以在 G 中找到紧致生成的开子群 H 使得 $a\in H, \delta(a)\in\hat{\hat{H}}$. 设 W 为 $\hat{G}$ 的恒等元 0 的邻域使得 $\delta(a)(W)\subset W_1$，又设 U_1为 G 的恒等元 0 的对称邻域使得 $\overline{U}_1$是紧致的. 令 H_1是由 U_1生成的 G 的子群，即

$$H_1=\bigcup_{n=1}^{\infty}nU_1,$$

则 $H_1^{\perp}=\widehat{G/H_1}$是紧致的（因为 G/H_1是离散的），由本节习题12，在 G 中存在 $x_1,\cdots,x_n$，使得它们在典范映射 $G\to G/H_1$下的像 $\bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n$ 在 G/H_1中生成子群 $\overline{H}_2$，并且满足 $H_2^{\perp}\subset W$，这里 H_2是 $\overline{H}_2$ 在 G 中完全原像. 现在取 H 为紧致生成的包含 $\overline{U}_1$及元素 $a,x_1,\cdots,x_n$ 的开子群，则 $H_2\subset H, H^{\perp}\subset H_2^{\perp}\subset W$，并且 $\delta(a)(H^{\perp})\subset\delta(a)(W)\subset W_1$，从而对任意的 $\chi\in H^{\perp}, k\delta(a)(\chi)=\delta(a)(k\chi)\in W_k, k=1,2,\cdots$. 因此 $\delta(a)(H^{\perp})=\{0\}$，即 $\delta(a)\in(H^{\perp})^{\perp}=\hat{\hat{H}}$. ▌

以下几个命题中，设 G 是紧致的，或局部紧致的，或离散的 Hausdorff 交换群. 由命题4.7和定理4.11，我们可以把 G 与 $\hat{\hat{G}}$ 看作是同一个群，并把 G 看作是 $\hat{G}$ 的特征标群，即对每个 $x\in G$，由 $x(\chi)=\chi(x)(\chi\in\hat{G})$定义了群 $\hat{G}$ 的特征标.

命题 4.12 设 H 是 G 的子群，则 $H=\hat{\hat{H}}$，从而 $H=(H^{\perp})^{\perp}$.

证明 显然 $H\subset\hat{\hat{H}}$. 若 $H\neq\hat{\hat{H}}$，则存在 $a\in\hat{\hat{H}}$ 但 $a\notin H$. 由命题4.5，$H^{\perp}=\widehat{G/H}$. 又因为在 G/H 中含 a 的陪集 $\bar{a}\neq 0$，由本节习题2，存在 $\xi\in\widehat{G/H}=H^{\perp}$ 使得 $\xi(\bar{a})=\xi(a)\neq 0$，这与 $a\in\hat{\hat{H}}=(H^{\perp})^{\perp}$矛盾. ▌

命题 4.13 设 H 是 G 的子群，$\xi\in\hat{G}$，$\bar{\xi}$ 是 ξ 在典范同态 $\hat{G}\to\hat{G}/H^{\perp}$下的像. 当 $x\in H$ 时，令 $\bar{\xi}(x)=\xi(x)$，它不依赖于 ξ 的选取. 则 $\bar{\xi}\in\hat{H}$ 是 H 的特征标，在这个意义下，$\hat{G}/H^{\perp}=\hat{H}$.

证明 由命题4.12，$H=(H^{\perp})^{\perp}=\widehat{\hat{G}/H^{\perp}}$. 但是，$x\in H$ 作为

群 $\hat{G}/H^{\perp}$ 的特征标与作为群 $\hat{G}$ 的特征标之间的关系是 $x(\bar{\xi})=x(\xi)$，把 $\hat{G}/H^{\perp}$ 作为群 H 的特征标群，由上述关系得 $\bar{\xi}(x)=\xi(x)$. ▌

由此可见，命题4.13是命题4.7的推广和补充.

命题 4.14 设 H 是 G 的子群，$x\in G$ 且 $x\notin H$，$\xi\in\hat{H}$，则存在 $\chi\in\hat{G}$ 使得 $\chi|_H=\xi$ 且 $\chi(x)\neq 0$.

证明 由命题4.13，$\hat{H}=\hat{G}/H^{\perp}$，存在 $\bar{\chi}\in\hat{G}/H^{\perp}$，使得 $\bar{\chi}$ 作为 H 的特征标就是 ξ. 设 χ_1 是陪集 $\bar{\chi}$ 的代表元，则 $\chi_1|_H=\xi$. 若 $\chi_1(x)\neq 0$，则取 $\chi=\chi_1$ 即可. 否则，因为商群 G/H 中含 x 的陪集 $\bar{x}\neq 0$，所以存在 $\eta\in\widehat{G/H}=H^{\perp}$，使得 $\eta(\bar{x})\neq 0$，从而 $\eta(x)=\eta(\bar{x})\neq 0$，再取 $\chi=\chi_1+\eta$ 即可. ▌

命题 4.15 设 $f: G_1\to G_2$ 是拓扑群同态，$\hat{f}:\hat{G}_2\to\hat{G}_1$ 是 f 的共轭同态(见本节习题1)，则

(1) $\hat{\hat{f}}=f$;

(2) 若 f 是开同态，则 $\hat{f}$ 也是开同态；

(3) 若 $H_1=\operatorname{Ker}f$，$H_2=\operatorname{Im}f$，则 $\operatorname{Ker}\hat{f}=H_2^{\perp}$，$\operatorname{Im}\hat{f}\subset H_1^{\perp}$.

证明 (1) 由于 $G_i=\hat{\hat{G}}_i\,(i=1,2)$，对 $x_1\in G_1$，$\chi_2\in\hat{G}_2$，有 $\hat{f}(\chi_2)(x_1)=\chi_2(f(x_1))$，因此 $f(x_1)(\chi_2)=x_1(\hat{f}(\chi_2))$，于是

$$\widehat{(\hat{f})}=\hat{\hat{f}}=f.$$

(3) 设 $\chi_2\in H_2^{\perp}$，$x_1\in G_1$，则 $\hat{f}(\chi_2)(x_1)=\chi_2(f(x_1))=0$，即 $\hat{f}(\chi_2)=0$，$\chi_2\in\operatorname{Ker}\hat{f}$. 反之，$\hat{f}(\chi_2)=0$ 时，对每个 $x_1\in G_1$，$\chi_2(f(x_1))=\hat{f}(\chi_2)(x_1)=0$，则 $\chi_2\in H_2^{\perp}$. 所以 $\operatorname{Ker}\hat{f}=H_2^{\perp}$.

设 $\chi_2\in\hat{G}_2$，$x_1\in\operatorname{Ker}f=H_1$，则 $\hat{f}(\chi_2)(x_1)=\chi_2(f(x_1))=\chi_2(0)=0$，从而 $\hat{f}(\chi_2)\in H_1^{\perp}$，即 $\hat{f}(\hat{G}_2)=\operatorname{Im}\hat{f}\subset H_1^{\perp}$.

(2) 设 $f:G_1\to G_2$ 是开同态，它诱导自然同构 $\bar{f}:G_1/H_1\to H_2$. 同时 $\hat{f}:\hat{G}_2\to\hat{G}_1$ 诱导了抽象群同构 $\bar{\hat{f}}:\hat{G}_2/\operatorname{Ker}\hat{f}\to\hat{f}(\hat{G}_2)\subset H_1^{\perp}\subset$

$\hat{G}_1$. 由于 $H_1^{\perp}=\widehat{G_1/H_1}$, $\hat{H}_2=\hat{G}_2/H_2^{\perp}$, 并且 $\hat{\bar{f}}=\bar{\hat{f}}$, $\bar{f}$ 是拓扑群同构，因此 $\hat{\bar{f}}$ 也是拓扑群同构. 又因为 $\bar{\hat{f}}$ 是 $\hat{G}_2/H_2^{\perp}$ 到 $H_1^{\perp}$ 上的开映射，所以 $\hat{f}$ 是 $\hat{G}_2$ 到 $H_1^{\perp}$ 上的开映射. ▌

命题 4.16 作为拓扑空间 G 的权等于 $\hat{G}$ 的权.

证明 由本节习题 5，$\hat{G}$ 的权不超过 G 的权，$\hat{\hat{G}}$ 的权不超过 $\hat{G}$ 的权，但 $\hat{\hat{G}}\cong G$，因此 $\hat{G}$ 的权等于 G 的权. ▌

例 2 设 G 是紧致的 Hausdorff 交换群，ρ 是 G 的1次线性表示，则对任意的 $x\in G$，$\rho(x)$ 是模等于 1 的复数. 令 $\chi(x)=\dfrac{\ln\rho(x)}{2\pi i}$，则 χ 是 G 的线性表示 ρ 的特征标. 反之，若 χ' 是 G 的一个特征标，则 $\rho'(x)=e^{2\pi i\chi'(x)}$ 是 G 的 1 次线性表示，它的特征标是 χ'.

继续本章 §3 例 6 的讨论，当 $G=K$ 时，K 的不可约线性表示 $\rho^{(n)}$ 的特征标 $\chi_n(x)=\dfrac{\ln\varphi_n(x)}{2\pi i}=nx$, $x\in K$, $n\in \mathbf{Z}$. 由例 1，$\{\chi_n\}_{n\in \mathbf{Z}}$ 是群 K 的全部不可约特征标，从而 $\{\rho^{(n)}\}_{n\in \mathbf{Z}}$ 是 K 的不可约线性表示的两两正交的完全组.

习 题

1. 设 $f: G_1\to G_2$ 是局部紧致的 Hausdorff 交换群同态，通过 $\hat{f}(\chi_2)=\chi_2\circ f$ 定义的映射 $\hat{f}:\hat{G}_2\to\hat{G}_1$ 称为 f 的**共轭映射**. 证明

(1) $\hat{f}$ 是拓扑群同态，核 $\operatorname{Ker}\hat{f}=f(G_1)^{\perp}$；

(2) 当 f 是同构时，$\hat{f}$ 也是同构.

2. 设 G 是紧致 Hausdorff 交换群，证明：对任意的 $0\neq x\in G$，存在 G 的特征标 χ 使得 $\chi(x)\neq 0$. 进一步证明当 G 是局部紧致群时，结论照样成立.

3. 设 G 是紧致 Hausdorff 交换群，Y 是 $\hat{G}$ 的子群，若对 G 中任意的 $x\neq 0$，存在 $\chi\in Y$ 使得 $\chi(x)\neq 0$，则 $Y=\hat{G}$.

4. 若 G 是局部紧致的 Hausdorff 交换群，H 是 G 的闭子集，$x\in G$, $x\notin H$，则存在 $\chi\in H^{\perp}$ 使得 $\chi(x)\neq 0$.

5. 设 G 是局部紧致的 Hausdorff 交换群，则 $\hat{G}$ 的权不超过 G 的权.

6. 设 G 是局部紧致的 Hausdorff 交换群，f 是 G 上连续函数，F 是 $\hat{G}$ 上连续函数，分别定义

$$\hat{f}(\chi) = \int f(x)\chi(x)\mathrm{d}x,$$

$$\hat{F}(x) = \int F(\chi)\,\overline{\chi(x)}\mathrm{d}\chi$$

为 f 与 F 的 Fourier 变换. 证明

(1) 实数加法群 $\boldsymbol{R}$ 上连续函数 f 的 Fourier 变换是

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x, \quad t \in \boldsymbol{R},$$

(2) 复平面上单位圆周的乘法群 S^1 上连续函数 f 的 Fourier 变换是

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\mathrm{d}x, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

7. 设 H 是局部紧致的 Hausdorff 交换群 G 的开子群，则同态 $\delta: G \to \hat{\hat{G}}$ 限制于子群 H 是同态 $\delta|_H: H \to \hat{\hat{H}}$.

8. 设 $G_1, \cdots, G_n$ 是局部紧致的 Hausdorff 交换群，$\delta_i: G_i \to \hat{\hat{G}}_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$，则 $\delta = (\delta_1, \cdots, \delta_n): \prod_{i=1}^{n} G_i \to \widehat{\widehat{\prod_{i=1}^{n} G_i}}$，当每个 δ_i 是同构时 δ 也是同构.

9. 设 G 是紧致或离散的 Hausdorff 交换群，S 是 G 的某些子群的集合使得 G 恰好是 S 中子群的直和，这时记 $G = \Pi(S)$. 当 $H \in S$ 时，令 $K_H = \Pi(S - \{H\})$ 是 G 的子群，则

(1) $\hat{H} = K_H^{\perp}$，记 $K_H^{\perp} = \sigma(H)$；

(2) $\hat{G} = \Pi(\sigma(S))$ 是它的子群集合 $\sigma(S) = \{\sigma(H) \mid H \in S\}$ 的直和.

10. 设 G 是局部紧致的 Hausdorff 交换群，K 是 $\hat{G}$ 的紧致子集，对任给正数 ε，令

$$V = \left\{ x \in G \middle| |\chi(x)| < \varepsilon, \chi \in K \right\},$$

$$W = \left\{ \hat{\chi} \in \hat{\hat{G}} \middle| |\hat{\chi}(\chi)| < \varepsilon, \chi \in K \right\}.$$

(1) 证明 $\delta(V) = W \cap \delta(G)$，于是 δ: $G \to \delta(G)$是同胚，并且$\hat{\hat{G}}$在 $\delta(G)$上的诱导拓扑使 $\delta(G)$是紧致空间；

(2) 证明 $\delta(G)$是 $\hat{\hat{G}}$ 的闭子集；

(3) 证明 $\delta(G)$是 $\hat{\hat{G}}$ 的稠密子集；

(4) 证明 G 与 $\hat{\hat{G}}$ 同构.

11. 设 G 是局部紧致的 Hausdorff 交换群，H 是 G 的开子群，证明 $\hat{\hat{H}} = (H^{\perp})^{\perp}$.

12. 设 G 是离散 Hausdorff 交换群，W 是 $\hat{G}$ 的恒等元 0 的邻域，则在 G 中存在有限生成子群 H 使得 $H^{\perp} \subset W$.

附录A 拓扑空间

为了方便读者查阅,我们编写了这个附录,进一步的细节可以参考[FL],[J],[K]和[P1]等.

定义 A.1 设 X 是一个集合,τ 是 X 的一个子集族,它的成员叫做 X 的**开集**.若 τ 满足公理(1)—(3),它就称为集合 X 的一个**拓扑**:

(1) X 与空集$\varnothing$是开集;

(2) 两个开集的交是开集;

(3) 任意多个开集的并是开集.

则 X 与它的一个拓扑 τ 称为一个**拓扑空间**,记作(X,τ).

对于一个非空集合 X,有一个**平凡的拓扑**,即 τ 仅由 X 与$\varnothing$这两个子集组成;还有一个**离散拓扑**,即 τ 由 X 的全部子集组成.称 $A\subset X$ 是一个**闭集**,若 A 在 X 中的补集 $X-A$ 是一个开集.

定义 A.2 设 X_1与 X_2是两个拓扑空间,映射 f: $X_1\rightarrow X_2$称为**连续的**,如果 X_2的任一开(闭)集在 f 下的原像是 X_1的开(闭)集.若 f 把 X_1的任一开(闭)集映为 X_2的开(闭)集,则称 f 为**开(闭)映射**.又若 f 是一一对应的连续映射,并且逆映射 f^{-1}: $X_2\rightarrow X_1$也是连续的,则称 f 为**同胚映射**,并称 X_1与 X_2**同胚**.

定义 A.3 集合 X 的子集族 $\mathscr{B}=\{B_\alpha\}$称为 X 的一个**开集基**,如果

(1) $X=\bigcup\limits_\alpha B_\alpha$;

(2) 对于 $\mathscr{B}$ 中任意两个包含点 $x\in X$ 的成员 B_α 与 B_β,存在 $B_\gamma\in\mathscr{B}$ 使得 $x\in B_\gamma\subset B_\alpha\cap B_\beta$.

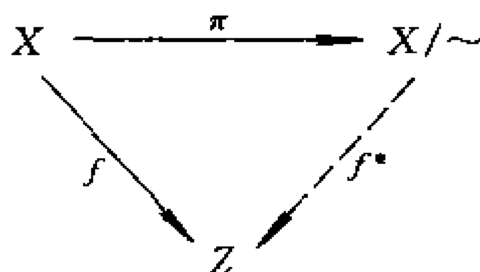
于是,X 的一个子集 A 称为关于 $\mathscr{B}$ 的开集,如果 A 是 $\mathscr{B}$ 的

若干成员的并集. 显然由所有关于 $\mathscr{B}$ 的开集所成的子集族 τ 是 X 的一个拓扑，并且 $\mathscr{B}\subset\tau$. 如果 $\mathscr{B}$ 是一个拓扑，那么 $\mathscr{B}=\tau$. 这时，拓扑 τ 称为由开集基 $\mathscr{B}$ 诱导出的拓扑，而且 $\mathscr{B}$ 是这个拓扑空间的一个开集基. 但是，一个集合可以有不同的开集基. 两个开集基是等价的，如果它们诱导出这个集合的同一个拓扑. 易见集合 X 的两个开集基 $\mathscr{B}$ 与 $\mathscr{B}'$ 等价当且仅当 $\mathscr{B}$ 中每个成员是关于 $\mathscr{B}'$ 的开集，并且 $\mathscr{B}'$ 中每个成员是关于 $\mathscr{B}$ 的开集.

定义 A.4 设 $Y\subset X$ 是拓扑空间 X 的子集，通过在 Y 上的**诱导拓扑**使 Y 成为拓扑空间：$U\subset Y$ 是开集当且仅当 $U=V\cap Y$，其中 $V\subset X$ 是开集. 这时，Y 称为 X 的**子空间**.

易见嵌入映射 i：$Y\to X$ 是连续映射.

定义 A.5 设～是拓扑空间 X 的一个等价关系，通过在商集合 $X/\sim$ 上的诱导拓扑，即使映射 π：$X\to X/\sim$ 为连续映射的拓扑：A 是 $X/\sim$ 中开集当且仅当 $\pi^{-1}(A)$ 是 X 中开集，使得 $X/\sim$ 成为拓扑空间，就称为**商空间**，这样定义的拓扑称为**商拓扑**. 它具有普遍性质：若 f：$X\to Z$ 是连续映射使得 $x\sim y$ 时 $f(x)=f(y)$，则存在唯一的连续映射 f^*：$X/\sim\to Z$ 使得 $f=f^*\circ\pi$，即有交换图：



定义 A.6 拓扑空间的任一开集称为它的每一点的一个**邻域**，也称为它的每一子集的一个邻域.

设 X 是拓扑空间，$A\subseteq X$. 一个点 $x\in A$ 称为 A 的**内点**. 如果存在 x 的邻域 $V\subset A$. A 的所有内点的集合称为 A 的**内集**，记作 $\mathrm{Int}A$. 点 $x\in X$ 的一个邻域集合 $\mathscr{T}(x)$ 称为**完全邻域组**，如果 x 的任意一个邻域都包含 $\mathscr{T}(x)$ 中一个成员. 易见

$$\{\mathscr{F}(x) \mid x \in X\}$$

构成 X 的**开集基**.

下面讨论**分离公理**,设 X 是拓扑空间.

公理 T_0 任意两个不同的点 x 与 y 中至少一点有一个邻域,不包含另一点.

公理 T_1 任意两个不同的点 x 与 y 各有一个邻域,不包含另一点.

公理 T_2 任意两个不同的点 x 与 y 各有一个邻域 V_x 与 V_y,使得 $V_x \cap V_y = \varnothing$.

公理 T_3 任意一个点 x 与不包含 x 的闭集 A 各有一个邻域 V_x 与 V_A,使得 $V_x \cap V_A = \varnothing$.

公理 T_4 任意两个不相交的闭集 A 与 B 各有一个邻域 V_A 与 V_B,使得 $V_A \cap V_B = \varnothing$.

满足公理 $T_i(i=0,1,2)$的拓扑空间称为 **T_i 空间**,特别把 T_2空间称为 **Hausdorff 空间**. 满足公理 T_1及 $T_i(i=3,4)$的拓扑空间称为 **T_i 空间**. 易知 T_i 空间一定是 T_{i-1}空间,$i=1,2,3,4$. 满足 T_3公理的拓扑空间称为**正则空间**,满足 T_4公理的拓扑空间称为**正规空间**. 并且可证公理 T_1等价于独点集是闭集.

定义 A.7 设 X 是一个集合,它的元素叫做点,而且定义**距离函数** ρ: $X \times X \to R_+$,对任意的 $x,y,z \in X$,有

(1) $\rho(x,y) \geqslant 0$,并且等号成立当且仅当 $x=y$;

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z)$,

则 X 称为**度量空间**. 对每个 $a \in X$,设 ε 是任一正数,则 X 中满足不等式 $\rho(x,a)<\varepsilon$ 的点 x 的集合称为 a 的一个邻域. 由 X 中每个点的所有邻域的集合所构成的 X 的开集基所诱导的拓扑称为**距离拓扑**.

于是每个度量空间是正规的 T_1空间,即 T_4空间.

定义 A.8 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集,$\mathscr{V}=\{V_\alpha\}$是 X

的一族开集，使得 $A\subset\bigcup_{\alpha}V_{\alpha}$，则 $\mathscr{V}$ 称为 A 的一个**开覆盖**. 如果 $\mathscr{V}$ 中成员的个数是有限的，$\mathscr{V}$ 就称为 A 的**有限开覆盖**. 如果 A 的覆盖 $\mathscr{V}$ 的一个子族也是 A 的一个覆盖，它就称为 A 的一个**子覆盖**. 拓扑空间 X 称为**紧致的**，如果 X 的每个开覆盖有一个有限的子覆盖.

命题 A.9 (1) 紧致拓扑空间 X 的每个闭子空间是紧致的；

(2) Hausdorff 空间 X 的每个紧致子空间是闭的；

(3) 若 $f: X\to Y$ 是从紧致拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射，则 $f(X)$ 是 Y 的紧致子集，从而紧致拓扑空间 X 上的连续实值函数达到它的最大值与最小值；

(4) 若 $f: X\to Y$ 是从紧致拓扑空间 X 到 Hausdorff 空间 Y 的连续映射，则 f 是闭映射；特别，当 f 是一一对应时，f 是同胚；

(5) 拓扑空间 X 的有限多个紧致子空间的并是紧致的. ▌

设 A 是拓扑空间 X 的一个子集，$x\in X$ 称为 A 的一个**聚点**，如果含 x 的每个邻域都包含 $A-\{x\}$ 的一个点. A 与它的全体聚点的并集称为 A 的**闭包**，记为 $\overline{A}$. 显然 A 是闭集当且仅当 $\overline{A}=A$. 特别当 $\overline{A}=X$ 时，称 A 为 X 的**稠密子集**.

命题 A.10 (1) 拓扑空间 X 是正则空间当且仅当 X 的任一点的每个邻域包含这个点的一个邻域的闭包；

(2) 拓扑空间 X 是正规空间当且仅当 X 的任一闭集的每个邻域包含这个闭集的一个邻域的闭包.

(3) Hausdorff 空间 X 中任意两个不相交的紧致子集 A 与 B 有不相交的邻域，从而每个紧致的 Hausdorff 空间是正则的，而且也是正规的；

(4) 拓扑空间 X 是正规的当且仅当对于 X 的任意两个不相交的闭集 A 与 B，存在连续函数 $f: X\to[0,1]$，使得 $x\in A$ 时 $f(x)=0$，而 $x\in B$ 时 $f(x)=1$. ▌

(4)的必要性部分就是著名的 Урысон **引理**. 为了使用方便，我

们给出 Урысон 引理的另一种表达方式：

设 X 是局部紧致的 Hausdorff 拓扑空间，$C\subset U\subset X$，其中 C 是 X 的紧致子集，U 是 X 的开子集，则存在连续函数 $f: X\to[0,1]$，使得 $x\in C$ 时 $f(x)=1$；$x\notin U$ 时 $f(x)=0$；并且 $\mathrm{supp}(f)=\{x\in X\mid f(x)\neq 0\}$ 是紧致的.

设 I 是任意指标集，$\{X_i\}_{i\in I}$是一族拓扑空间，在积集合

$$X=\prod_{i\in I}X_i$$

上赋予拓扑：设 $\mathscr{B}_i$ 是 X_i 的开集基，则 X 的开集基是

$$\mathscr{B}=\Big\{V=\prod_{i\in I}V_i\,|\,V_i\in\mathscr{B}_i,\text{且除了有限个 } i \text{ 外},\\ V_i=X_i, i\in I\Big\}.$$

这样定义的拓扑称为**乘积拓扑**，X 称为$\{X_i\}_{i\in I}$的**拓扑积**.

下述命题描述了拓扑积的基本性质.

命题 A.11 (1) Hausdorff 空间的拓扑积也是 Hausdorff 空间；

(2)（Тихонов） 紧致拓扑空间的拓扑积仍是紧致拓扑空间.

▌

定义 A.12 拓扑空间 X 中每一点 x 有一个邻域 V，使得 $\overline{V}$ 是紧致的，则称 X 是**局部紧致的**.

命题 A.13 (1) 紧致拓扑空间是局部紧致的；

(2) 局部紧致空间的闭子空间是局部紧致的；

(3) $X=\prod_{i\in I}X_i$ 是拓扑空间$\{X_i\}_{i\in I}$的拓扑积，则 X 是局部紧致的当且仅当每个 X_i 是局部紧致的，且除了有限个 i 外，X_i 是紧致的；

(4) 设 $f: X\to Y$ 是局部紧致空间 X 到拓扑空间 Y 的开且满的连续映射，则 Y 是局部紧致的；

(5) 设 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间，Y 是 X 的紧致子集，U 是 Y 的邻域，则存在开集 V 使得 $\overline{V}$ 是紧致的，并且 $Y\subseteq V\subseteq$

$\overline{V}\subseteq U$;

(6) 设 X 是局部紧致的 Hausdorff 空间，则 X 的任一开子集是局部紧致的. ▌

最后，我们介绍拓扑空间的连通性的概念.

定义 A.14 若拓扑空间 X 是它的两个非空的不相交的开子集 A 与 B 的并集，则 X 是**不连通的**拓扑空间，这时 $X=A\cup B$ 称为 X 的一个**分解**. 若 X 不是不连通的，它就是**连通的**拓扑空间. 拓扑空间 X 是**局部连通的**，如果对每个 $x\in V$ 及 x 的每个邻域 V，都存在 x 的连通邻域 U 使得 $U\subset V$.

又设 X 是拓扑空间，$x,y\in X$，若存在连续映射 f: $[0,1]\to X$ 使得 $f(0)=a$，$f(1)=b$，则 f 称为 X 中连接 x 与 y 的一条**道路**. 若对于 X 中任意两点，都有一条连接它们的道路，则称 X 是**道路连通的**.

我们罗列相关的性质如下：

命题 A.15 (1) 拓扑空间 X 是连通的当且仅当 X 的子集中只有 X 与 $\varnothing$ 是既开且闭的；

(2) 若 f: $X\to Y$ 是连通拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 的连续映射，则 $f(X)$ 是连通的；

(3) 拓扑空间 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的拓扑积 $X=\prod\limits_{i\in I}X_i$ 连通的充分必要条件是每个 X_i 连通；

(4) 若拓扑空间 X 的子空间 Y 是连通的，且 $Y\subsetneqq Y_1\subseteq\overline{Y}$，则 Y_1 也是连通的；特别，$\overline{Y}$ 也是连通的；

(5) 若 $Y\subset X$ 是拓扑空间 X 的连通子空间，$\{Y_\alpha\}$ 是 X 的一族连通子空间，且每个成员 Y_α 与 Y 相交，则 $Y\cup\left(\bigcup\limits_\alpha Y_\alpha\right)$ 是连通的；

(6) 道路连通的拓扑空间 X 是连通的. ▌

如果拓扑空间 X 的一个子空间 A 是最大的连通子空间，它就称为 X 的一个**连通分支**. 易见 X 的每个连通子空间落在一个连通分支内，从而 X 的连通分支是 X 的闭子空间.

定义 A.16 设 X 是拓扑空间,$x\in X$,所有包含 x 的连通子空间的并称为 X 在 x 点的**连通分支**,记为 $\mathrm{Comp}_X(x)$.

命题 A.17 (1) $\mathrm{Comp}_X(x)$是 X 中非空连通闭子空间,且 $X=\bigcup_{x\in X}\mathrm{Comp}_X(x)$;

(2) 设 X 是紧致 Hausdorff 空间,则任意一点 x 的分支 $\mathrm{Comp}_X(x)$是包含 x 的所有开,闭集之交.

如果拓扑空间 X 的每点 x 的分支 $\mathrm{Comp}_X\{x\}=\{x\}$,那么 X 是**完全不连通的**.显然,离散空间是完全不连通的.

附录B　Zorn 引理

设 S 是一个集合，如果在 S 的元素之间定义一个**关系**，记作 $x \leqslant y$，满足

PO1　$x \leqslant x$；

PO2　若 $x \leqslant y, y \leqslant x$，则 $x = y$；

PO3　若 $x \leqslant y, y \leqslant z$，则 $x \leqslant z$.

那么，称这个关系是 S 的一个**半序**，并把 S 称为**半序集**.

又设 T 是 S 的子集，则可以在 T 中定义半序，使得 $x \leqslant y$ 在 T 中成立当且仅当 $x \leqslant y$ 在 S 中成立. 这时，我们说 S 的半序限制于 T，或 T 上的半序由 S 的半序诱导的.

设 S 是一个半序集，$a \in S$ 称为 S 的**最小元素**（或**最大元素**），如果对任意的 $x \in S$ 都有 $a \leqslant x$（或 $x \leqslant a$）；$b \in S$ 称为 S 的**极小元素**（或**极大元素**），如果对任意的 $x \in S$，当 $x \leqslant b$（或 $b \leqslant x$）时，一定有 $x = b$.

一个半序集 S 称为是**全序集**，如果对任意的 $x, y \in S$，一定有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$.

设 T 是半序集 S 的一个子集，$m \in S$ 称为 T 的**上界**（或**下界**），如果对每个 $x \in T$ 有 $x \leqslant m$（或 $m \leqslant x$）. 特别，当 n 是 T 的另一个上界（或下界）时，一定有 $m \leqslant n$（或 $n \leqslant m$），则 m 是 T 的**最小上界**（或**最大下界**）. 当半序集 S 的每个非空全序子集 T 有一个上界，则称 S 为**归纳有序集**. 进一步假定半序集 S 的每个非空全序子集 T 有一个最小上界，则称 S 为**严格归纳有序集**.

Zorn 引理　设 S 是一个非空归纳有序集，则 S 中存在一个极大元素.　▌

回忆一下，S 的子集的集合 C 称为一个**链**，如果 C 关于子集

的包含关系是一个全序集. S 的子集的集合 T 称为**归纳的**,如果 T 中任一个链 $C=\{A_\alpha\}$ 的并 $\bigcup A_\alpha \in T$. 这样,我们可以给出 Zorn 引理的另一种表述方式:

Zorn 引理(另一种表述方式) 设 T 是集合 S 的子集的非空集合,如果 T 是归纳的,那么 T 含有一个极大元素,即存在 $M\in T$ 使得没有 $A\in T$ 真包含 M.

例 设 R 是一个环,S 是 R 中左理想集合,对 R 的任意两个左理想 L 与 L',通过 $L\subset L'$ 来定义 $L\leqslant L'$,使得 S 成为一个半序集,可以验证 S 是严格归纳有序集.

特别,当 R 是交换环时,利用 Zorn 引理可以证明 R 中一定存在极大理想.

可以证明 Zorn 引理等价于下面的**选择公理**.

选择公理 设 $\{S_i\}_{i\in I}$ 是一族非空集合,则存在一族元素 $\{x_i\}_{i\in I}$ 使得每个 $x_i\in S_i$.

附录C 射 影 极 限

设$\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$是群的序列，$\{\theta_{n+1}: G_{n+1}\to G_n\}_{n=1}^{\infty}$是同态的序列，它们构成一个**逆向系**. 设 G 是所有**凝聚列**$\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$的集合，即每个 $s_n\in G_n$，$\theta_{n+1}(s_{n+1})=s_n(n=1,2,\cdots)$. 定义两个凝聚列的积为$\{s_n\}\{t_n\}=\{s_nt_n\}$，使得 G 成为一个群，那么 G 称为这个逆向系的**射影极限**，或**逆向极限**，记为

$$G=\varprojlim G_n.$$

类似的，可以定义模、环或代数的逆向系的射影极限.

例 设 p 是素数，$\mathbf{Z}(n)=\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$，$\theta_{n-1}$：$\mathbf{Z}/p^{n+1}\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ 是自然同态，则 ***p*-adic 整数环** $\mathbf{Z}_p=\varprojlim\mathbf{Z}_n$. 并且 $\mathbf{Z}_p$ 中元素可唯一地表成

$$a=\sum_{i=0}^{\infty}m_ip^i,\quad 0\leqslant m_i\leqslant p-1.$$

汉英名词索引

一　画

一般线性群　general linear group　6

一致收敛　uniformly convergent　156

一致连续　uniformly continuous　156

一致完全函数组　set of uniformly complete functions　172

一致有界函数组　set of uniformly bounded functions　156

一致连续函数组　set of uniformly continuous functions　156

二　画

二面体群　dihedral group　3

八面体群　octahedral group　6

三　画

子代数　subalgebra　23

子群　subgroup　2

子模　submodule　19

子环　subring　17

子表示　subrepresentation　41

子空间　subspace　193

子覆盖　subcovering　195

上三角矩阵　upper triangular matrix　142

上界　upper bound　199

亏数　defect　131

亏群　defect group　137

四 画

不动元素 fixed element 9

不可分解模 indecomposable module 20

不可约线性表示 irreducible linear representation 41

不变积分 invariant integral 157

不变测度 invariant measure 158

内射模 injective module 37

内射包 injective envelope 37

内点 interior point 193

内集 set of interior points 193

反轭表示 contragredient representation 45

升链条件 ascending chain condition 29

中心 centre 10

中心化子 centralizer 10

中心特征标 central character 128

中心幂等元 central idempotent 127

分解同态 decomposition homomorphism 110

分解矩阵 decomposition matrix 110

分离公理 separation axiom 194

无限阶元素 infinite order element 2

无限群 infinite group 2

开同态 open homomorphism 187

开映射 open mapping 192

开子群 open subgroup 146

开集 open set 192

开集基 basis of open sets 192

开覆盖 open covering 195

双模 bimodule 22

双陪集 double coset 15

双边理想 two-sided ideal 26

长度 length 31

五　画

四面体群　tetrahedral group　5

左陪集　left coset　2

左理想　left ideal　17

左模　left module　19

左平移　left translation　10

左零因子　left zero divisor　16

左平均数　left average　160

右理想　right ideal　17

右模　right module　19

右平移　right translation　10

右零因子　right zero divisor　16

右陪集　right coset　2

右平均数　right average　159

平均数　average　160

平衡积　balanced product　21

正则表示　regular representation　41

正则空间　regular space　194

正规正交基　normal orthogonal basis　4

正规空间　normal space　194

正规化子　normalizer　11

正规子群　normal subgroup　3

正交幂等元　orthogonal idempotent　124

正交中心幂等元　orthogonal central idempotent　125

正交群　orthogonal group　142

归纳有序集　inductively ordered set　199

外幂　exterior power　44

本质同态　essential homomorphism　28

本质单一同态　essential monomorphism　37

本原幂等元　primitive idempotent　124

对换　transposition　5

对称群 symmetric group 4
对称幂 symmetric power 44
对偶群 dual group 179
对角矩阵 diagonal matrix 142
对偶表示 dual representation 45
可逆元 invertible element 17
可解群 solvable group 13
主块 principal block 125
主理想 principal ideal 17
主理想整环 principal ideal domain 17
半直积 semidirect product 13
半单代数 semisimple algebra 41
半单环 semisimple ring 33
半单模 semisimple module 32
半序集 par-tially ordered set 199
全序集 totally ordered set 199
代数 algebra 23
代数同态 algebra homomorphism 23
代数整数 algebraic integer 34
代数理想 algebraic ideal 23
由 S 生成的子群 subgroup generated by S 2
生成元 generator 2

六 画

交换群 commutative group 1
交换环 commutative ring 16
交错群 alternating group 5
交结数 interwining number 75
同态 homomorphism 7,17,20,141
同构 isomorphism 7,18,20,141
同胚 homeomorphism 192
齐性 homogeneity 144

共轭类　conjugate class　10
共轭类的亏数　defect of conjugate class　133
共轭类的亏群　defect group of conjugate class　133
共轭映射　conjugate mapping　189
次数　degree　39
权　weight　178
重数　multiplicity　53
行列式　determinant　7
自然同态　natural homomorphism　8
自由模　free module　27
亚循环群　metacyclic group　89
轨道　orbit　9
轨道映射　orbit mapping　153
合成列　composition series　13,29
合成因子　composition factor　13,29
传递　transitivity　9
有限群　finite group　2
有限生成模　finitely generated module　19
有限生成理想　finitely generated ideal　17
有限维代数　finite dimensional algebra　23
有限开覆盖　finite open covering　195
有恒等元的环　ring with identity　16
闭子群　closed subgroup　146
闭集　closed set　192
闭包　closure　195
阶　order　1

七　画

完全可约模　completely reducible module　32
完全不连通的拓扑群　completely disconnected topological group　151
完全邻域组　complete system of neighbourhoods　193
块　block　125

块幂等元　block idempotent　125
邻域　neighbourhood　193
位似　homothety　55
张量积　tensor product　21
初等子群　elementary subgroup　95
初级群　primary group　186
辛群　symplectic group　142
局部环　local ring　18
局部紧致拓扑群　locally compact topological group　149
局部连通拓扑群　locally connected topological group　151
连通　connectivity　197
连通分支　connected component　197
连续　continuity　156,191
连续映射　continuous mapping　191
连结　linkage　125
极大理想　maximal ideal　18
极大元素　maximal element　199
酉表示　unitary representation　46
酉矩阵　unitary matrix　46
严格归纳有序集　strictly inductively ordered set　199

八　画

环　ring　16
表示　representation　39
表示空间　representation space　39
表示环　representation ring　66
直和　direct sum　20
直积　direct product　13
拓扑空间　topological space　192
拓扑积　topological product　196
拓扑群　topological group　141
拓扑变换群　topological transformation group　153

单一同态　monomorphism　7
单项表示　monomial representation　90
单位表示　unit representation　41
单模　simple module　19
单群　simple group　13
降链条件　descending chain condition　29
和　sum　1
奇置换　odd permutation　5
轮换　cycle　5
实线性表示　real linear representation　167
线性表示　linear representation　39
忠实表示　faithful representation　39
限制　restriction　69
卷积　convolution　178

九　画

诱导拓扑　induced topology　193
诱导表示　induced representation　70
恒等元　identity　1
逆元　inverse element　1
逆向系　inverse system　201
逆向极限　inverse limit　201
迹　trace　7
点群　point group　4
选择公理　axiom of choice　199
复线性表示　complex linear representation　167
度量空间　metric space　194
挠子模　torsion module　36
类方程　class equation　11
类函数　class function　49
指数　index　2
除环　skew field　17

十　画

特征　characteristic　17
特征标　character　48
特征标表　character table　51
特征标群　character group　179
特征值　eigenvalue　170
特征函数　eigenfunction　170
特殊线性群　special linear group　6,142
核　kernel　7,170
素理想　prime ideal　18
射影　projection　41
射影不可分解模　projective indecomposable module　101
射影模　projective module　27
射影包　projective cover　28
射影极限　projective limit　201
离散拓扑　discrete topology　192
离散群　discrete group　180
离散赋值　discrete valuation　35
离散赋值环　discrete valuation ring　35
紧致　compactness　195
紧致集　compact set　195
紧致拓扑群　compact topological group　149
紧致生成　compactly generated　186
陪集　coset　3
格　lattice　107
秩　rank　27
真特征标　proper character　66
乘积拓扑　product topology　196
振幅　amplitude　157
换位子群　commutator group　16
积　product　1

根 radical 38

十一画

商代数 quotient algebra 23
商群 quotient group 3
商模 quotient module 20
商环 quotient ring 18
商空间 quotient space 193
商拓扑 quotient topology 193
域 field 17
理想 ideal 17
偶置换 even permutation 5
距离函数 distance function 194
距离拓扑 distance topology 194
虚特征标 virtual character 66
基础组 fundamental system 170

十二画

循环群 cyclic group 3
像 image 7
道路 path 197
道路连通 path connected 197
链 chain 199
等价 equivalence 10
赋值环 valuation ring 35
短正合列 short exact sequence 67
最大元素 greatest element 199
最小上界 least upper bound 199

十三画

群 group 1
群代数 group algebra 24

满同态　epimorphism　7
置换表示　permutation representation　41
置换　permutation　4
零元　zero　16
零化子　annihilator　182
稠密子集　dense subset　195

十 四 画

模　module　19
模 m 约化　reduction modulo m　36,108
稳定子群　stable subgroup　9
聚点　cluster point　195

十 五 画

幂等元　idempotent　124
幂零群　nilpotent group　13

十 六 画

整闭　integrally closed　35
整环　domain　16
凝聚列　coherent sequence　201

其　他

Abel 群　abelian group　1
Artin 定理　Artin theorem　91
Brauer 特征标　Brauer character　115
Brauer 定理　Brauer theorem　95
Cartan 同态　Cartan homomorphism　,110
Cartan 矩阵　Cartan matrix　110
Cartan-Brauer 三角形　Cartan-Brauer triangle　110
Cayley 定理　11
Clifford 定理　Clifford theorem　80

Euler-φ函数　Euler-φ function　15
Fourier 逆公式　63
Frobenius 子群　77
Frobenius 互反性　Frobenius reciprocity　75
Grothendieck 群　Grothendieck group　66
Hausdorff 空间　Hausdorff space　194
Hermite 内积　Hermite inner product　46,164
Jordan-Hölder 定理　Jordan-Hölder theorem　13
k-特征标　k-character　115
Lagrange 定理　Lagrange theorem　3
Lorentz 群　Lorentz group　142
Mackey 定理　Mackey theorem　78
Maschke 定理　Maschke theorem　41
Nakayama 引理　Nakayama lemma　38
p-元素　p-element　94
p'-元素　p'-element　94
p-正则元素　p-regular element　94
p-奇异元素　p-singular element　112
p-幂幺元素　p-unipotent element　94
p-分支　p-component　94
p'-分支　p'-component　94
p-adic 数域　p-adic field　35
p-adic 整数　p-adic integer　35
p-adic 拓扑　p-adic topology　36
p-adic 赋值　p-adic valuation　35
p-块　p-block　125
p-初等子群　p-elementary subgroup　94
p-群　p-group　11
p-模系统　p-modular system　36
Plancherel 公式　Plancherel formula　69,178
Peter-Weyl定理　Peter-Weyl theorem　172
Schur 引理　Schur lemma　33

Sylow p-子群　Sylow p-subgroup　12
Sylow 定理　Sylow theorem　12
T_0空间　T_0 space　194
T_1空间　T_1 space　194
T_2空间　T_2 space　194
T_3空间　T_3 space　194
T_4空间　T_4 space　194
Урысон 引理　Урысон lemma　195
Zorn 引理　Zorn lemma　200

符 号 说 明

aH	含 a 的左陪集
A_n	交错群
$A^{\perp}$	A 的零化子
$\overline{A}$	A 的闭包
$B_n(\boldsymbol{R})$	实数域上的上三角矩阵群
C_n	n 阶循环群
$\mathfrak{C}_i$	共轭类
c_i	共轭类 $\mathfrak{C}_i$ 的元素个数
$c(x)$	x 所在共轭类的元素个数
char F	域 F 的特征
C_∞	平面上的旋转群
$\mathrm{Comp}_X(x)$	X 的含 x 的连通分支
$\boldsymbol{C}$	复数域
$\boldsymbol{C}^*$	非零复数的乘法群
D_n	二面体群
D_{nh}	D_n 与2阶群的直积
D_∞	平面上旋转与反射的群
$D_{\infty h}$	D_∞ 与2阶群的直积
$\mathrm{d}x$	不变测度
E_i	单 $k[G]$-模同构类的代表元
e_i	共轭类 $\mathfrak{C}_i$ 中元素的和
$\varphi(n)$	Eulerφ-函数
φ_E	$k[G]$-模 E 的 Brauer 特征标
Φ_i	射影不可分解 $A[G]$-模 Q_i 的 K-特征标
$F_C(G)$	G 上复值类函数的空间
$F_K(G_{\mathrm{reg}})$	G 的 p -正则元素上的 K-值类函数的空间
$\mathscr{F}_C(G)$	拓扑群 G 上复值连续函数的空间
G	群

$|G|$　群 G 的阶

$[G:H]$　H 在 G 中的指数

G/N　G 关于 N 的商群

$GL_n(F)$　域 F 上一般线性群

$G\cdot x$　x 的 G-轨道

G_x　x 在 G 中稳定子群

$G\backslash H$　G 关于 H 的左陪集空间

(G,G)　G 的换位子群

$GL(V)$　V 上可逆线性变换群

G_{reg}　G 的 p-正则元素的集合

$\hat{G}$　G 的特征标群

$H<G$　H 是 G 的子群

$H\lhd G$　H 是 G 的正规子群

Ha　含 a 的右陪集

H/G　G 关于 H 的右陪集空间

HN 或 $H\times N$　H 与 N 的直积

$H\ltimes N$　H 与 N 的半直积，其中 H 正规化 N

$H/G\backslash N$　G 关于 H 与 N 的双陪集空间

$\mathrm{Hom}_R(M,M')$　从 M 到 M' 的 R-模同态

$H_l\underset{c}{\subset}H_k$　H_l 含在 H_k 的某个共轭子群中

$(i_1,\cdots,i_k)$　k-轮换

1　恒等元

$\mathbf{1}_M$　M 上恒等映射

$\mathrm{Im}\varphi$　φ的像

$\mathrm{Ind}_H^G\theta$(或 $\mathrm{Ind}_H^G W$)　θ(或 W)的诱导表示(或诱导模)

$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{pmatrix}$　n 元置换

(K,A,k)　p-模系统

$\mathrm{Ker}\varphi$　φ的核

$K=\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$　与 S^1同构的初级群，加法群

χ_ρ(或 χ_V)　线性表示 ρ(或 G-模 V)的特征标

$K(f)$　函数 f 的平均数

$l(M)$　模 M 的长度

$\varprojlim P_n$	逆向系统 $\{P_n, \theta_{n+1}\}_{n\in N}$ 的射影极限
$\Lambda^k(V)$	V 的外幂
$M_n(F)$	域 F 上 n 阶矩阵的集合
M/N	M 关于 N 的商模
$M\otimes_R N$	M 与 N 的张量积
μ_K	K 中 m 次单位根的乘法群
μ_k	k 中 m 次单位根的乘法群
$\mathfrak{m}$	p-adic 赋值环 A 的唯一的极大理想
M^x	M 中 x 不动点的集合
$N_G(H)$	H 在 G 中的正规化子
$N\oplus P$	N 与 P 的直和
η_i	射影不可分解 $k[G]$-模 P_{E_i} 的 Brauer 特征标
$O_n(\mathbf{R})$	实数域上正交群
(p,f)	平衡积
$P_k(G)$	有限生成射影 $k[G]$-模范畴的 Grothendieck 群
$P_A(G)$	有限生成射影 $A[G]$-模范畴的 Grothendieck 群
$\mathscr{P}(S)$	集合 S 的幂集合
$\mathscr{P}(S)^*$	集合 S 的非空子集的集合
$PGL_n(\mathbf{R})$	实数域上射影一般线性群
$\mathbf{Q}$	有理数域
$\mathbf{Q}_p$	p-adic 数域
$R[G]$	环 R 上 G 的群代数
Reg	正则表示
reg	正则表示的特征标
$R[G]$	群 G 的表示环，有限生成 $\mathbf{C}[G]$-模范畴的 Grothendieck 群
$R_L(G)$	有限生成 $L[G]$-模范畴的 Grothendieck 群
$R^+(G)$	群 G 的特征标的集合
$\mathrm{Res}^G_H\rho$（或 $\mathrm{Res}^G_H V$）	线性表示 ρ（或 G-模 V）的限制
ρ_x	x 在线性表示 ρ 下的像
ρ^*	线性表示 ρ 的对偶表示或反轭表示
$\rho^{(1)}\otimes\rho^{(2)}$	线性表示 $\rho^{(1)}$ 与 $\rho^{(2)}$ 的张量积
$\mathrm{rad}(M)$	R-模 M 的根

R_x	ρ_x 在一个基下的矩阵
R_λ	属于特征值 λ 的所有特征函数及零函数构成的实向量空间
$\mathbf{R}$	实数域
$\mathbf{R}^*,\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+^*$	非零实数的乘法群,非负实数集合,正实数的乘法群
$\langle S\rangle$	由 S 生成的群
S_n	n 个文字的对称群
$S(X)$	集合 X 上的对称群
$SL_n(F)$	域 F 上特殊线性群
$\mathrm{Stab}_G x$	x 在 G 中的稳定子群
$S^k(V)$	V 的对称幂
S_L	单 $L[G]$-模同构类的代表元集合
S_k	单 $k[G]$-模同构类的代表元集
S_K	单 $K[G]$-模同构类的代表元集
S^1	复平面上单位圆周的乘法群
$\int f(x)\mathrm{d}x$	$f(x)$的不变积分
$\mathrm{Tor}(M)$	M 的挠子模
$\mathrm{tr}(a)$	a 的迹
$T_n(\mathbf{R})$	实数域上对角矩阵群
V^*	V 的对偶空间
(V,W)	V 与 W 的交结数
$\langle X\rangle$	由 X 生成的左理想
X^G	X 中 G 作用的不动元素的集合
$\mathfrak{X}_p$	p-初等子群所成的 G 的子群族
$\mathfrak{X}_0$	G 的初等子群所成的子群族
${}^xH_k$	x 共轭作用于 H_k
$Z_G(x)$	x 在 G 中的中心化子
$Z(G)$	G 的中心
0	零元
$\mathbf{Z}$	整数环
$\mathbf{Z}^+$	非负整数的集合

$\boldsymbol{N}$	正整数的集合
$\boldsymbol{Z}_r$	与 r 阶循环群同构的初级群
$\boldsymbol{Z}_p$	p-adic 整数环
$(,)$	Hermite 内积
$\in$	属于
$\overline{\in}$（或 $\notin$）	不属于
$\subseteq$	包含于
$\subset$（或 $\subsetneq$）	真包含于
$\varnothing$	空集

参 考 文 献

[AM] Atiyah, M. F. & Macdonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading Mass., 1969.（中译本：冯绪宁、刘木兰、戴宗铎译，万哲先校，《交换代数导引》，科学出版社，北京，1982.）

[B1] Benson, D. J., *Representations and Cohomology* Ⅰ, *Basic Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[B2] Benson, D. J., *Representations and Cohomology* Ⅱ, *Cohomology of Groups and Modules*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[CR1] Curtis, C. W. & Reiner, I., *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, Wiley-Interscience, New York, 1962.

[CR2] Curtis, C. W. & Reiner, I., *Methods of Representation Theory* Ⅰ, Wiley-Interscience, New york, 1981.

[CR3] Curtis, C. W. & Reiner, I., *Methods of Representation Theory* Ⅱ, Wiley-Interscience, New York, 1987.

[CSh] 曹锡华、时俭益，《有限群表示论》，高等教育出版社，北京，1992.

[DM] Digne, F. & Michel, J., *Representations of Finite Groups of Lie Type*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[DN] 聂灵沼、丁石孙，《代数学引论》，高等教育出版社，北京，1988.

[F] Feit, W., *The Representation Theory of Finite Groups*, North-Holland, Amsterdam, 1982.

[FH] Fulton, W. & Harris, J., *Representation Theory: A First Course*, Springer GTM 129, New York, 1991.

[FL] 黎景辉、冯绪宁，《拓扑群引论》，科学出版社，北京，1991.

[H] Hungerford, T. W., *Algebra*, Springer GTM 73, New York, 1974. (中译本：冯克勤译，聂灵沼校，《代数学》，湖南教育出版社，湖南长沙，1985.)

[J] 江泽涵，《拓扑学引论》，上海科学技术出版社，上海，1978.

[Ja1] Jacobson, N., *Basic Algebra* Ⅰ, Freeman, San Francisco, 1974.

[Ja2] Jacobson, N., *Basic Algebra* Ⅱ, Freeman, San Francisco, 1980.

[K] Kelley, J. L., *General Topology*, Springer GTM 27, New York, 1975.

[P1] Понтрягин, Л. С., Непрерывные Группы, Государственное Издателвство, Москва, 1954. (中译本：曹锡华译，《连续群(上)》，科学出版社，北京，1957.)

[P2] Понтрягин, Л. С., Непрерывные Группы, Государственное Издателвство, Москва, 1954. (中译本：曹锡华译，《连续群(下)》，科学出版社，北京，1957.)

[S] Serre, J.-P., *Linear Representations of Finite Groups*, Springer GTM 42, New York, 1977. (中译本：郝鈵新译，《有限群的线性表示》，科学出版社，北京，1984.)

[W1] van der Waerden, B. L., *Algebra* Ⅰ, Springer, Berlin, 1955. (中译本：丁石孙、曾肯成、郝鈵新译，万哲先校，《代数学(Ⅰ)》，科学出版社，北京，1963.)

[W2] van der Waerden, B. L., *Algebra* Ⅱ, Springer, Berlin, 1959. (中译本：曹锡华、曾肯成、郝鈵新译，万哲先校，《代数学(Ⅱ)》，科学出版社，北京，1976.)

[Z] 张禾瑞，《近世代数基础》，人民教育出版社，北京，1978.